

微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 9)

広義重積分 2—注意と発展

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

$f(x, y)$ が D の中で正・負が入り混じる場合, 広義重積分は近似増加列を使って簡単に計算することはできない.

厳密には, $f(x, y)$ の正の部分 $f_+(x, y)$, 負の部分 $f_-(x, y)$ とに分けて $[f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y)]$, 2つの広義重積分

$$\iint_D f_+(x, y) dx dy, \quad \iint_D f_-(x, y) dx dy$$

を考えたとえて

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f_+(x, y) dx dy - \iint_D f_-(x, y) dx dy$$

と計算するのが正式な方法である.

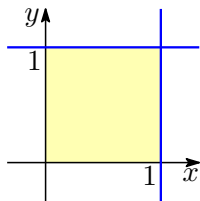
例 9.1.

広義重積分 $\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ は収束しない.

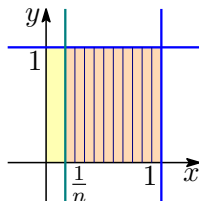
D およびその近似増加列 3 種類を以下に図示する. ただし,

$$(1) A_n : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1. \quad (2) B_n : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1.$$

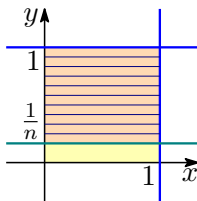
$$(3) C_n : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1.$$



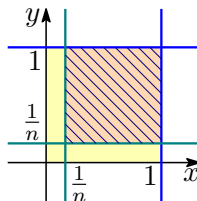
D



(1) A_n



(2) B_n



(3) C_n

ここで,

$$\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right)_x.$$

(1) 縦線図形とみなして計算する.

$$\begin{aligned} I(A_n) &= \iint_{A_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \left[\tan^{-1} x \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} I(A_n) = \frac{\pi}{4}.$

(2) 横線図形とみなして計算する.

$$\begin{aligned} I(B_n) &= \iint_{B_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 -\frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \left[-\tan^{-1} y \right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=1} = -\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \frac{1}{n} = -\frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} I(B_n) = -\frac{\pi}{4}$.

(3) まず, $I(C_n) = \iint_{C_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ は2通りの累次積分で書くことが可能である:

$$I(C_n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy, = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx.$$

後者の累次積分で, 単純に x と y とを文字の交換をすれば,

$$\begin{aligned} I(C_n) &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx \right) dy \\ &= - \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = -I(C_n). \end{aligned}$$

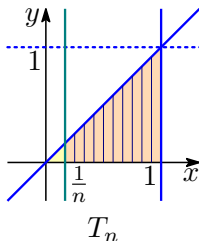
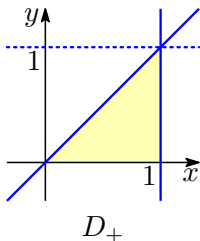
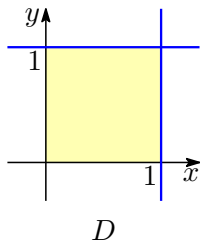
したがって, $I(C_n) = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} I(C_n) = 0$.

※ $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ が C_n 上で連続な歪対称関数だから 0 と考えてもよい.

このように、近似増加列の選び方によって値が変わってしまう。
 実は、好きな値に近づくような近似増加列を考えることができる。
 では、なぜこのようなことが起きてしまったのか。
 それは正負の符号が入り混じった広義重積分のせいである。

そこで、 D のうち $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \geq 0$ の部分 D_+ だけの (広義) 重積分を先に
 計算してしまおう。

$$D_+ : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 - y^2 \geq 0. \quad \therefore D_+ : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x.$$



この近似増加列として $T_n : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ を選ぶと,

$$\begin{aligned} I(T_n) &= \iint_{T_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x}{x^2 + x^2} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x}{2x^2} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log |x| \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = \frac{1}{2} \log 1 - \frac{1}{2} \log \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \log n. \end{aligned}$$

ゆえに,

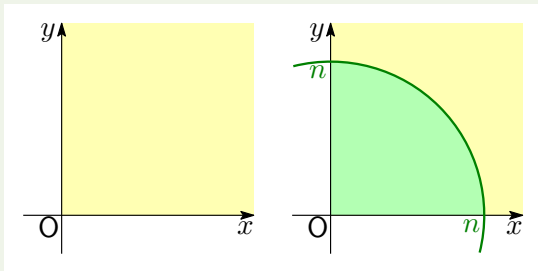
$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(T_n) = \infty.$$

例の広義重積分は正の部分と負の部分に分けて計算すると
 $\infty + (-\infty) = \infty - \infty$ の形になってしまう (振動・不定形).
これは値が確定しないのである.

広義重積分の計算と極座標変換を組み合わせたものを考える.

例 9.2. $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy, D: x \geq 0, y \geq 0.$

近似増加列を $S_n: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2$ とする.



極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を行くと, S_n は $T_n: 0 \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ と 1 対 1 対応する.

したがって,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{T_n} e^{-r^2} |r| dr d\theta \\ &= \left(\int_0^n r e^{-r^2} dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \right) \end{aligned}$$

ここで, r の積分は $-r^2 = t$ と置換することで

$$\begin{aligned} \int_0^n r e^{-r^2} dr &= \int_0^{-n^2} r e^t \frac{1}{-2r} dt = \int_0^{-n^2} -\frac{1}{2} e^t dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^t \right]_{t=0}^{t=-n^2} = -\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1 - e^{-n^2}}{2}. \end{aligned}$$

一方, θ の積分は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta = \left[\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

それゆえに,

$$I_n = \frac{1 - e^{-n^2}}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1 - e^{-n^2}}{4} \pi.$$

以上から

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{4}.$$

以上の結果に対し, 近似増加列を $R_n: 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$ とすれば,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{R_n} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^n e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

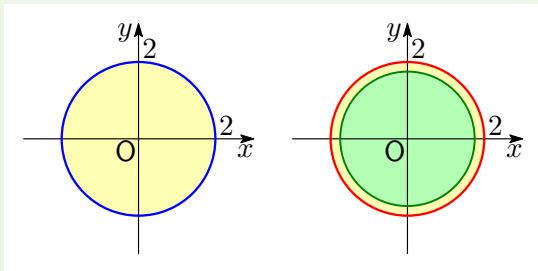
$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{4}$ だから,

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}. \quad \therefore \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

このようにガウス積分を導出することができた.

例 9.3. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 4.$

近似増加列を $S_n: x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{1}{n^2}$ とする.



極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を行くと, S_n は T_n :

$0 \leq r \leq \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ と 1 対 1 対応する.

したがって,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{S_n} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy = \iint_{T_n} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} |r| dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \end{aligned}$$

ここで, r の積分は $4-r^2=t$ と置換することで

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} dr &= \int_4^{\frac{1}{n^2}} \frac{r}{\sqrt{t}} \frac{1}{-2r} dt = \int_4^{\frac{1}{n^2}} -\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{2}{1} t^{\frac{1}{2}} \right]_{t=4}^{t=\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{n} + 2. \end{aligned}$$

一方, θ の積分は

$$\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = \left[\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi.$$

それゆえに,

$$I_n = \left(2 - \frac{1}{n} \right) \times 2\pi.$$

以上から

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 4\pi.$$