微分積分4(重積分) 自習スライド (Part 7)

極座標変換

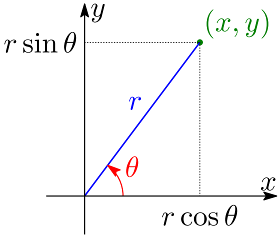
鈴木 敏行

神奈川大学

2023年03月02日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

変数変換の中でも代表的なものが**極座標変換**である.



$$x = r\ \cos\theta,\ y = r\ \sin\theta. \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

ヤコビアンを計算する.

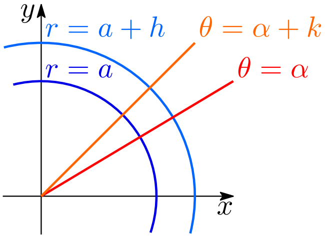
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\ \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\ \cos\theta$$

だから,

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\ \sin\theta \\ \sin\theta & r\ \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r\ \cos^2\theta - (-r\ \sin^2\theta) = r\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r. \end{aligned}$$

$r \geqq 0$ だったから, $J \geqq 0$ であることに注意する.

よくよく考えてみれば，極座標で $a \leqq r \leqq a+h,\ \alpha \leqq \theta \leqq \alpha + k$



この面積が

扇形の面積: $\dfrac{1}{2} R^2 \Theta$ ($R > 0$:半径，Θ:中心角)

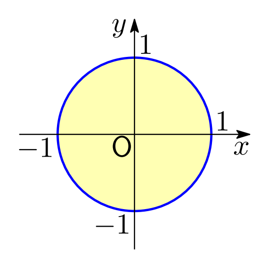
$$\frac{1}{2}(a+h)^2 k - \frac{1}{2} a^2 k = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{2} k = ahk + \frac{1}{2} h^2 k \fallingdotseq ahk$$

となるわけだから，$h = dr$，$k = d\theta$ とすれば，$r\,dr\,d\theta$ が得られる．

2 重積分は体積の計算だったわけだから，底面積 $\times$ 高さの底面積の部分が $dx\,dy$(直交座標での長方形の面積) と $r\,dr\,d\theta$(極座標での長方形の面積) が対応しているのは問題ないだろう．

例 7.1. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2 \leqq 1$.

図示すれば, 次の通り.



極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ をすれば, D は
E: $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ と 1 対 1 対応する.

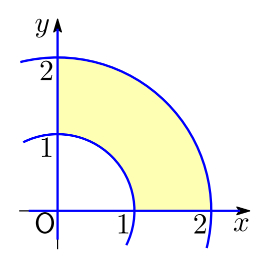
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r$ である．
したがって，変数変換の公式から

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_E r\,r\,dr\,d\theta = \iint_E r^2\,dr\,d\theta$$
$$= \left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right) = \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=1}\left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{3}\times 2\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

ところで，$(x,y)=(0,0)$ に対応するのは $r=0$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ であったり，$\theta=0$ と $\theta=2\pi$ とで対応する (x,y) は同じだったりして，1 対 1 対応していない点があるように感じられる．しかし，実際に 1 対 1 対応していないといけないのは内部の部分であり，対応していない点が多少あってもよい (面積にして 0 の部分)．

例 7.2. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, D: $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$.

図示すれば, 次の通り.



極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ をすれば, D は

E: $1 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ と 1 対 1 対応する.

$f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ について

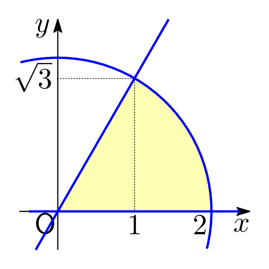
$$f(r\ \cos\theta, r\ \sin\theta) = \frac{r\ \cos\theta}{r} = \cos\theta.$$

したがって, 変数変換の公式から

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_E \cos\theta\, r\, dr\, d\theta = \iint_E r\ \cos\theta\, dr\, d\theta$$
$$= \left(\int_1^2 r\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\right) = \left[\frac{1}{2}\, r^2\right]_{r=1}^{r=2} \Big[\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}.$$

例 7.3. $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2 \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}\,x$.

図示すれば, 次の通り.



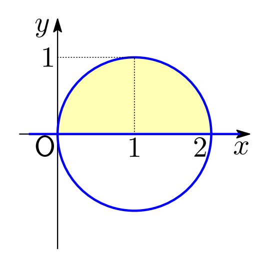
極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ をすれば, D は
E: $0 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ と 1 対 1 対応する.

$f(x,y)=y$ について $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\sin\theta$ である.
したがって, 変数変換の公式から

$$\iint_D y\,dx\,dy = \iint_E r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta = \iint_E r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$$
$$= \left(\int_0^2 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta\right) = \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2}\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{8}{3}\times\left(-\frac{1}{2}-(-1)\right) = \frac{4}{3}.$$

例 7.4. $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$.

図示すれば, 次の通り.



極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ をすれば, D は
E: $0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ と 1 対 1 対応する.

※ $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$

$$x^2-2x+1+y^2 \leqq 1. \quad x^2+y^2 \leqq 2x. \quad r^2 \leqq 2r\cos\theta.$$

$f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$ について

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta\, r = r^2\sin\theta.$$

したがって，変数変換の公式から

$$\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_E r^2\sin\theta\,\sin\theta\,r\,dr\,d\theta = \iint_E r^3\sin\theta\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta} r^3\sin\theta\,dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\sin\theta\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{16}{4}\cos^4\theta\,\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\,\sin\theta\,d\theta.$$

ここで, $t = \cos\theta$ とおけば, $dt = -\sin\theta\, d\theta$ なので,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\ \cos^4\theta\ \sin\theta\, d\theta = \int_1^0 4\, t^4\ \sin\theta\, \frac{1}{-\sin\theta}\, dt = \int_1^0 -4\, t^4\, dt$$
$$= \left[-\frac{4}{5}\, t^5\right]_{t=1}^{t=0} = \frac{4}{5}.$$