微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 6)

変数変換の公式

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

定積分であったら, 積分の計算方法として置換積分法や部分積分法があった.
2 重積分についてもそれに該当するものはあるのだが,
ここでは置換積分の一般化である変数変換の公式を考える.

置換積分 (定積分)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数,
$g(t)$ は $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$ であり, $\alpha \leqq t \leqq \beta$ (または $\beta \leqq t \leqq \alpha$) で C^1 級な関数とする.

このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt.$$

変数変換の公式 (2 重積分)

$f(x,y)$ は D で連続な関数, $x(u,v)$, $y(u,v)$ は E で C^1 級な関数とする.
D と E とは $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ によって 1 対 1 対応しており,

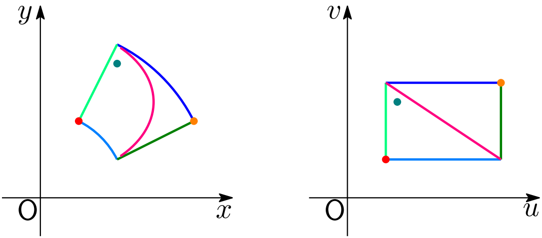
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

(ヤコビアンという) は 0 でないとする.

このとき,

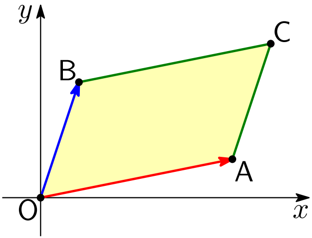
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_E f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,|J|\,du\,dv.$$

D は x,y 平面上の図形, E は u,v 平面上の図形.



y
O
x
v
O
u

証明を進めるにあたって, 次のような平行四辺形の面積を計算してみよう.



A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) **のとき, 平行四辺形** OACB **の面積**

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$ **だから,**
余弦定理により, $\angle\mathrm{BOA} = \theta$ **とすると**

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{a_1\, b_1 + a_2\, b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_2^2)}}.$$

平行四辺形の面積は $S = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\,\sin\theta$ **と計算できる.**

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \sin^2\theta \\
&= (a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_2^2)\,(1 - \cos^2\theta) \\
&= (a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_2^2)\,\frac{(a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_2^2) - (a_1\,b_1 + a_2\,b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_2^2)} \\
&= (a_1^2 + a_2^2)\,(b_1^2 + b_2^2) - (a_1\,b_1 + a_2\,b_2)^2 \\
&= a_1^2\,b_1^2 + a_1^2\,b_2^2 + a_2^2\,b_1^2 + a_2^2\,b_2^2 - (a_1^2\,b_1^2 + 2\,a_1\,b_1\,a_2\,b_2 + a_2^2\,b_2^2) \\
&= a_1^2\,b_2^2 + a_2^2\,b_1^2 - 2\,a_1\,b_2\,a_2\,b_1 \\
&= (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)^2.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
S = |a_1\,b_2 - a_2\,b_1| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|.
$$

証明の前に, 2 重積分というのが元々体積の計算の手法だったことを思い出してほしい.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \Leftarrow \sum_{i,j} f(\alpha_{ij},\beta_{ij})\,(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1}).$$

の部分が D を細分してできた長方形の面積である.

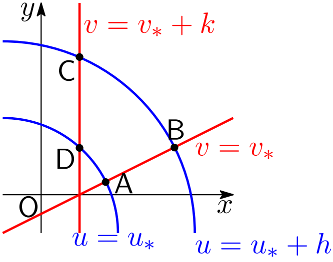
これを一般化すれば, 次のように考えてもよいはずである.

D を細分化して, 各微小断片 D_k を考え, D_k の面積を $|D_k|$ と表し, D_k 上の点を (α_k,β_k) とすれば,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \Leftarrow \sum_k f(\alpha_k,\beta_k)\,|D_k|.$$

変数変換の公式の証明

E が長方形 K: $a \leqq u \leqq b$, $c \leqq v \leqq d$ の場合を考える.
さて, h, k は十分小さな数とする.
u, v 平面上で $u_* \leqq u \leqq u_* + h$, $v_* \leqq v \leqq v_* + k$ の面積は $h\,k$ だが,
これに対応する D の一部分の面積を求めてみよう.



対応する D の断片は, だいたい

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\big(x(u_*,v_*),y(u_*,v_*)\big),\\
&\mathrm{B}\big(x(u_*+h,v_*),y(u_*+h,v_*)\big),\\
&\mathrm{C}\big(x(u_*+h,v_*+k),y(u_*+h,v_*+k)\big),\\
&\mathrm{D}\big(x(u_*,v_*+k),y(u_*,v_*+k)\big)
\end{aligned}$$

を四隅とする四角形とみなせ, その四角形を平行四辺形とみなせる.
その平行四辺形の 2 辺のベクトルを求めると,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \big(x(u_*+h,v_*)-x(u_*,v_*),y(u_*+h,v_*)-y(u_*,v_*)\big),\\
\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \big(x(u_*,v_*+k)-x(u_*,v_*),y(u_*,v_*+k)-y(u_*,v_*)\big).
\end{aligned}$$

ここで, $x(u,v)$, $y(u,v)$ に対し, テイラーの定理を用いれば,

$$\begin{aligned}
x(u_*+h,v_*)-x(u_*,v_*) &\fallingdotseq x_u(u_*,v_*)\,h,\\
y(u_*+h,v_*)-y(u_*,v_*) &\fallingdotseq y_u(u_*,v_*)\,h,\\
x(u_*,v_*+k)-x(u_*,v_*) &\fallingdotseq x_v(u_*,v_*)\,k,\\
y(u_*,v_*+k)-y(u_*,v_*) &\fallingdotseq y_v(u_*,v_*)\,k.
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \bigl(x_u(u_*, v_*)\,h, y_u(u_*, v_*)\,h\bigr), \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \bigl(x_v(u_*, v_*)\,k, y_v(u_*, v_*)\,k\bigr).$$

したがって, D の断片である微小平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned} &\left|\det\begin{pmatrix} x_u(u_*, v_*)\,h & x_v(u_*, v_*)\,k \\ y_u(u_*, v_*)\,h & y_v(u_*, v_*)\,k \end{pmatrix}\right| \\ &= h\,k\left|\det\begin{pmatrix} x_u(u_*, v_*) & x_v(u_*, v_*) \\ y_u(u_*, v_*) & y_v(u_*, v_*) \end{pmatrix}\right| = h\,k\,|J(u_*, v_*)|. \end{aligned}$$

これに高さを掛けて足し合わせれば, $I = \displaystyle\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ となるはずである (正確には近似).

$$\Delta u : a = u_0 < u_1 < \cdots < u_i < \cdots < u_m = b,$$
$$\Delta v : c = v_0 < v_1 < \cdots < v_j < \cdots < v_n = d,$$

(u_*, v_*) を $(u_{ij}, v_{ij}) = (u_i, v_j)$ とし, (α_k, β_k) のおき方を $\alpha_k = x(u_i, v_j)$, $\beta_k = y(u_i, v_j)$ としてしまえば, I は

$$\sum_k f(\alpha_k, \beta_k)\, |D_k| = \sum_{i,j} f\big(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)\big)\, h\, k\, |J(u_i, v_j)|$$

$h = (u_i - u_{i-1})$, $k = (v_j - v_{j-1})$ だから,

$$\sum_{i,j} f\big(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)\big)\, |J(u_i, v_j)|\, (u_i - u_{i-1})\,(v_j - v_{j-1})$$
$$\Rightarrow \iint_K f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\, |J(u, v)|\, du\, dv.$$

したがって,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_K f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv.$$

E が一般の場合には, 積分領域が長方形から一般図形になった場合のようなことを考えれば充分である.

ヤコビアン

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

がヤコビアン (Jacobian) である.
符号の意味, そして変数変換の際に絶対値が付く理由は
次回の授業内で説明する予定である.

変数変換する場合, 最初から $x(u,v)$, $y(u,v)$ が与えられているわけではないのだから, 自分で計算できるようにしておこう.

例 6.1. $u = 3x + y$, $v = x + 2y$ とおいたときのヤコビアンを求める.

まず, $x(u,v)$, $y(u,v)$ を求めよう.

$$\begin{array}{rrcl} & 2u & = & 6x + 2y \\ -) & v & = & x + 2y \\ \hline & 2u - v & = & 5x \end{array} \quad \therefore\ x = \frac{2u - v}{5},$$

$$\begin{array}{rrcl} & u & = & 3x + y \\ -) & 3v & = & 3x + 6y \\ \hline & u - 3v & = & -5y \end{array} \quad \therefore\ y = \frac{-u + 3v}{5}.$$

したがって,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{5}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{3}{5}.$$

ゆえに, ヤコビアンは

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{25} - \frac{1}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

例 6.2. $x > 0$, $y > 0$ とする. $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ とおいたときのヤコビアンを求める.

まず, $x(u, v)$, $y(u, v)$ を求めよう.

$$u\,v = xy \times \frac{y}{x} = y^2. \quad \therefore\ y = \sqrt{u\,v} = u^{\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{u}{v} = xy \times \frac{x}{y} = x^2. \quad \therefore\ x = \sqrt{\frac{u}{v}} = u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}.$$

したがって,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}.$$

ゆえに, ヤコビアンは

$$
\begin{aligned}
J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\,u^{0}\,v^{-1} - \left(-\frac{1}{4}\,u^{0}\,v^{-1}\right) = \frac{1}{2}\,v^{-1}.
\end{aligned}
$$

変数変換の公式を用いた 2 重積分の計算をやってみよう.

変数変換の公式

$f(x,y)$ は D で連続な関数, $x(u,v)$, $y(u,v)$ は E で C^1 級な関数とする. D と E とは $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ によって 1 対 1 対応しており,

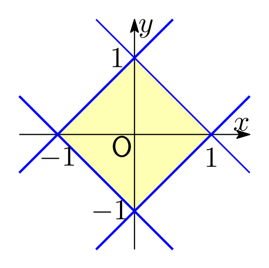
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \neq 0.$$

このとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,|J|\,du\,dv.$$

例 6.3. $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\,dx\,dy$, D: $-1 \leqq y-x \leqq 1$, $-1 \leqq x+y \leqq 1$.

図示すると, 以下の通り.



$u = y - x$, $v = x + y$ とおくと, $x = \dfrac{-u+v}{2}$, $y = \dfrac{u+v}{2}$. したがって,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

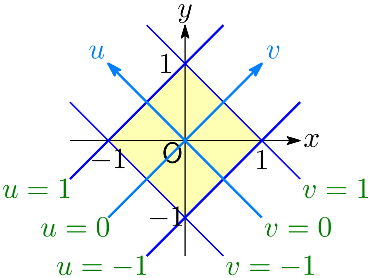
ゆえに, ヤコビアンは

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

D は E: $-1 \leqq u \leqq 1$, $-1 \leqq v \leqq 1$ と 1 対 1 対応しているから,

$$\begin{aligned}
&\iint_D x^2 + y^2 \, dx\, dy = \iint_E \left[\left(\frac{-u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right] |J| \, du\, dv \\
&= \iint_E \frac{1}{4}\,(u^2+v^2)\, du\, dv = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,(u^2+v^2)\, dv\right) du \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \left[u^2\, v + \frac{1}{3}\, v^3\right]_{v=-1}^{v=1} du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \left(2\, u^2 + \frac{2}{3}\right) du \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3}\, u^3 + \frac{2}{3}\, u\right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

ところで, $u = y - x$, $v = x + y$ なので, u 軸と v 軸の位置関係を重ね合わせてみよう.



x 軸と y 軸の位置関係は反時計回りに回して重ねた方が近いが,
u 軸と v 軸の位置関係は時計回り (逆!) に回して重ねた方が近い.

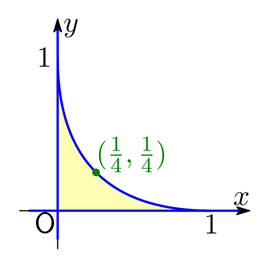
ヤコビアンの符号は, この座標変換による軸の位置関係を反映したものになっている.

- 正であれば, 軸の位置関係にねじれや反転は起きていないことになる.
- 負であれば, 軸の位置関係にねじれや反転が起きていることになる.

軸の位置関係は体積には影響しないから, 2 重積分の変数変換の公式でヤコビアンには絶対値が必要だったということである.

例 6.4. $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, D: $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1$.

図示すると, 以下の通り.



$x = r\cos^4\theta,\ y = r\sin^4\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とすれば

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{r}\cos^2\theta + \sqrt{r}\sin^2\theta = \sqrt{r}. \quad \therefore\ 0 \leqq r \leqq 1.$$

したがって，

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos^4\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -4\,r\,\cos^3\theta\,\sin\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin^4\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = 4\,r\,\sin^3\theta\,\cos\theta,$$

ゆえに，ヤコビアンは

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \cos^4\theta & -4\,r\,\cos^3\theta\,\sin\theta \\ \sin^4\theta & 4\,r\,\sin^3\theta\,\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= 4\,r\,\sin^3\theta\,\cos^5\theta - (-4\,r\,\sin^5\theta\,\cos^3\theta) \\ &= 4\,r\,\sin^3\theta\,\cos^3\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4\,r\,\sin^3\theta\,\cos^3\theta. \end{aligned}$$

D は E: $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ と 1 対 1 対応している.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{r^2\,\cos^4\theta\,\sin^4\theta} = r\,\cos^2\theta\,\sin^2\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy &= \iint_E r\,\cos^2\theta\,\sin^2\theta\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \iint_E r\,\cos^2\theta\,\sin^2\theta\,4\,r\,\sin^3\theta\,\cos^3\theta\,dr\,d\theta \\
&= \left(\int_0^1 4\,r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\,\sin^5\theta\,d\theta\right).
\end{aligned}$$

r の積分は

$$\int_0^1 4\,r^2\,dr = \left[\frac{4}{3}\,r^3\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4}{3}.$$

一方, θ の積分は $t = \sin\theta$ と置換することで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, \sin^5\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,(1-\sin^2\theta)^2\, \sin^5\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^1 \cos\theta\,(1-t^2)^2\, t^5\, \frac{1}{\cos\theta}\, dt = \int_0^1 t^5 - 2\,t^7 + t^9\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{6}\,t^6 - \frac{2}{8}\,t^8 + \frac{1}{10}\,t^{10}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{10-15+6}{60} = \frac{1}{60}.$$

以上から, $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{60} = \dfrac{1}{45}$.

ちなみに, D は $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq (1-\sqrt{x})^2$ という縦線図形なので,

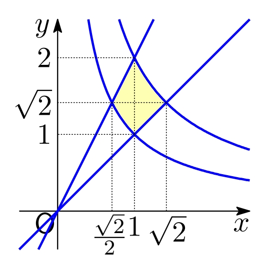
$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy\Big)\,dx$$
$$= \int_0^1 \Big[x^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}}\Big]_{y=0}^{y=(1-\sqrt{x})^2}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\,x^{\frac{1}{2}}\,(1-\sqrt{x})^3\,dx.$$

ここで, $\sqrt{x} = t$ と置換すると, $x = t^2$ だから

$$\int_0^1 \frac{2}{3}\,x^{\frac{1}{2}}\,(1-\sqrt{x})^3\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\,t\,(1-t)^3\,2t\,dt$$
$$= \int_0^1 \frac{4}{3}\,(t^2 - 3\,t^3 + 3\,t^4 - t^5)\,dt = \frac{4}{3}\Big[\frac{1}{3}\,t^3 - \frac{3}{4}\,t^4 + \frac{3}{5}\,t^5 - \frac{1}{6}\,t^6\Big]_{t=0}^{t=1}$$
$$= \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{4}{3} \times \frac{20-45+36-10}{60} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{45}.$$

例 6.5. $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$, D: $x \leqq y \leqq 2x$, $\dfrac{1}{x} \leqq y \leqq \dfrac{2}{x}$.

図示すると, 以下の通り.



$u = \dfrac{y}{x}$, $v = xy$ とおくと, $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}} = u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, $y = \sqrt{uv} = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$.

したがって,

$$
\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2}\,u^{-\frac{3}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}},
$$
$$
\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}.
$$

ゆえに, ヤコビアンは

$$
\begin{aligned}
J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\,u^{-\frac{3}{2}}\,v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{4}\,u^{-\frac{2}{2}}\,v^{\frac{0}{2}} - \frac{1}{4}\,u^{-\frac{2}{2}}\,v^{\frac{0}{2}} = -\frac{1}{2}\,u^{-1}.
\end{aligned}
$$

D は E: $1 \leqq u \leqq 2$, $1 \leqq v \leqq 2$ と 1 対 1 対応しているから,

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_E u^{-\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}\,|J|\,du\,dv = \iint_E \frac{1}{2}\,u^{-\frac{3}{2}}\,v^{\frac{1}{2}}\,du\,dv$$

$$= \Big(\int_1^2 \frac{1}{2}\,u^{-\frac{3}{2}}\,du\Big)\Big(\int_1^2 v^{\frac{1}{2}}\,dv\Big) = \Big[\frac{1}{2}\,\frac{2}{-1}\,u^{-\frac{1}{2}}\Big]_{u=1}^{u=2}\Big[\frac{2}{3}\,v^{\frac{3}{2}}\Big]_{v=1}^{v=2}$$

$$= -(2^{-\frac{1}{2}} - 1) \times \frac{2}{3}\,(2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times (2\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1 - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3\right) = \frac{2}{3}\,\frac{5\sqrt{2} - 6}{2} = \frac{5\sqrt{2} - 6}{3}.$$