微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 5)
積分順序の変更

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

積分順序の変更

D が縦線図形でも横線図形でもある場合, 2 重積分は 2 通りの計算方法があることに注意する.

D: $a \leqq x \leqq b$, $g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)$ のとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

D: $c \leqq y \leqq d$, $h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$ のとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

したがって, 縦線図形として 2 重積分を計算したら都合が悪い場合に,
横線図形として見直して 2 重積分を計算してもよいことになる.
結果だけ見たら

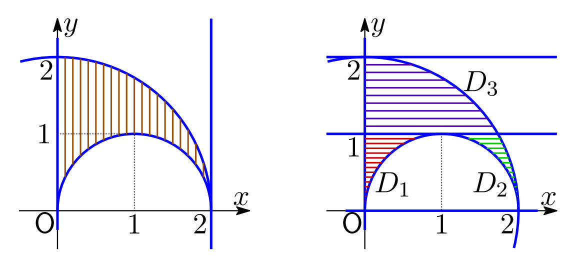
$$\int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \Big)\,dy$$

となるから, 積分順序の変更というわけだが,
単純に積分順序を (積分範囲を変えずに) 交換しているわけではないのに
注意しよう.

縦線図形はいつも横線図形である，とはいえないことに注意.

例 5.1. D: $0 \leqq x \leqq 2$, $\sqrt{2x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{4 - x^2}$.

D は縦線図形であり，図示すると左のようになる.



D は横線図形ではない.
しかし，次の 3 つの横線図形を合体させたものである.

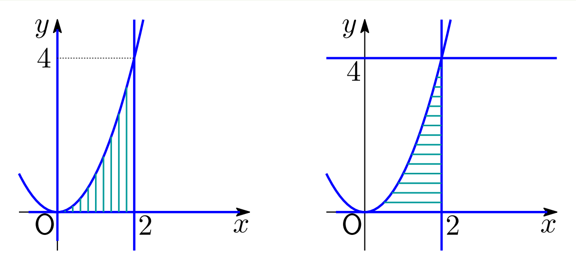
$$D_1: \ 0 \leqq y \leqq 1, \ 0 \leqq x \leqq 1 - \sqrt{1 - y^2}.$$
$$D_2: \ 0 \leqq y \leqq 1, \ 1 + \sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{4 - y^2}.$$
$$D_3: \ 1 \leqq y \leqq 2, \ 0 \leqq x \leqq \sqrt{4 - y^2}.$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \Big(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy + \int_0^1 \Big(\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \\
&+ \int_1^2 \Big(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.
\end{aligned}
$$

例 5.2. D: $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq x^2$.

図示すると, 次の通り (左).

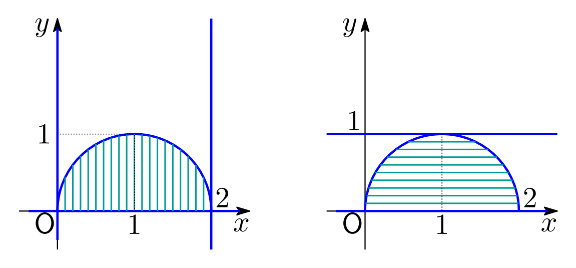


これを横線図形としてみなせば,

$$D: \ 0 \leqq y \leqq 4, \ \sqrt{y} \leqq x \leqq 2.$$

例 5.3. D: $0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2x - x^2}$.

図示すると, 次の通り (左).

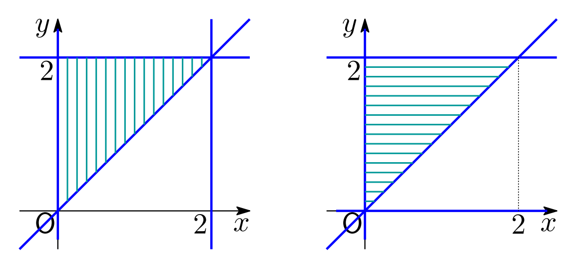


これを横線図形としてみなせば,

$$D:\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 1 - \sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1 - y^2}.$$

例 5.4. $\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy$, D: $0 \leqq x \leqq 2$, $x \leqq y \leqq 2$.

図示すると, 次の通り (左).



もし, 縦線図形のまま計算しようとすると, 計算できないことがわかる.

$$\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_x^2 e^{y^2}\,dy \right) dx.$$

D を横線図形としてみなせば, D: $0 \leqq y \leqq 2$, $0 \leqq x \leqq y$.

したがって，

$$\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^y e^{y^2}\,dx\right) dy = \int_0^2 \left[e^{y^2}\,x\right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^2 y\,e^{y^2}\,dy.$$

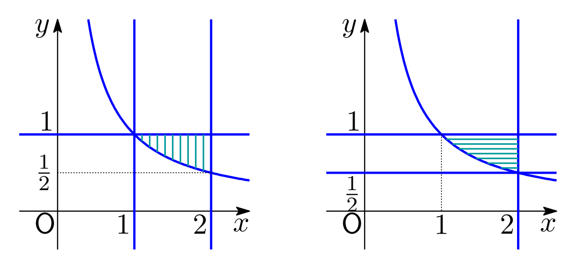
ここで，$y^2 = t$ と置換すれば，$2y\,dy = dt$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 y\,e^{y^2}\,dy &= \int_0^4 y\,e^t\,\frac{1}{2y}\,dt = \int_0^4 \frac{1}{2}\,e^t\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\,e^t\right]_{t=0}^{t=4} = \frac{e^4-1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} y & t \\ \hline 2 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array}$$

例 5.5. $\displaystyle\iint_D y\,e^{xy}\,dx\,dy$, D: $1 \leqq x \leqq 2$, $\dfrac{1}{x} \leqq y \leqq 1$.

図示すると, 次の通り (左).



もし, 縦線図形のまま計算しようとすると, 計算が大変そう.

$$\iint_D y\,e^{xy}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^1 y\,e^{xy}\,dy \right) dx.$$

D を横線図形としてみなせば, D: $\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1$, $\dfrac{1}{y} \leqq x \leqq 2$.

したがって, $(e^{xy})_x = y\,e^{xy}$ に注意すれば,

$$\iint_D y\,e^{xy}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{y}}^{2} y\,e^{xy}\,dx\right)dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big[e^{xy}\Big]_{x=\frac{1}{y}}^{x=2}\,dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2y} - e^{1}\,dy = \left[\frac{1}{2}\,e^{2y} - e\,y\right]_{y=\frac{1}{2}}^{y=1} = \frac{e^2 - e^1}{2} - e\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{e^2 - e}{2} - \frac{1}{2}\,e = \frac{e^2 - 2\,e}{2}.$$

ちなみに, 大変なまま計算すると,

$$\iint_D y\, e^{xy}\, dx\, dy = \int_1^2 \Bigl(\int_{\frac{1}{x}}^1 y\, e^{xy}\, dy \Bigr)\, dx$$

$$= \int_1^2 \Bigl\{ \Bigl[y\, \frac{e^{xy}}{x} \Bigr]_{y=\frac{1}{x}}^{y=1} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{e^{xy}}{x}\, dy \Bigr\}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\, e^x - \frac{1}{x^2}\, e - \Bigl[\frac{e^{xy}}{x\, x} \Bigr]_{y=\frac{1}{x}}^{y=1}\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\, e^x - \frac{1}{x^2}\, e - \frac{e^x - e^1}{x^2}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\, e^x - \frac{1}{x^2}\, e^x\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\, (e^x)' + \Bigl(\frac{1}{x} \Bigr)' e^x\, dx = \int_1^2 \Bigl(\frac{1}{x}\, e^x \Bigr)' dx = \Bigl[\frac{1}{x}\, e^x \Bigr]_{x=1}^{x=2}$$

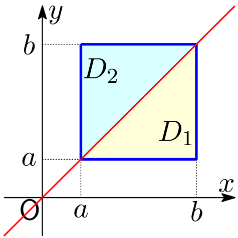
$$= \frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{1}\, e^1 = \frac{e^2 - 2\, e}{2}.$$

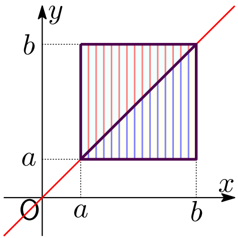
おまけ: 偶関数と奇関数の一般化

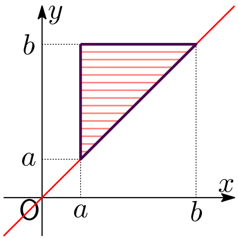
$f(x,y)$ は K: $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ で連続であるとする. このとき,

$$D_1 : \ a \leqq x \leqq b, \ a \leqq y \leqq x \quad D_2 : \ a \leqq x \leqq b, \ x \leqq y \leqq b$$

とすれば, D_1 と D_2 が被っているのは $y = x$ のだけであり, D_1 と D_2 を合わせると K になる.







したがって，

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

D_1 上の 2 重積分は次のように累次積分で表される．

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\,dy\right) dx.$$

一方，D_2 を横線図形とみなす．すると，D_2: $a \leqq y \leqq b$, $a \leqq x \leqq y$ となる．

したがって, D_2 上の 2 重積分は次のように累次積分で表される.

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^y f(x,y)\,dx \right) dy.$$

x と y との文字の役割を逆にすれば,

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_a^x f(y,x)\,dy \right) dx.$$

以上から,

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_a^x [f(x,y) + f(y,x)]\,dy \right) dx.$$

ここで，$f(x,y)$ が偶関数のように $f(y,x) = f(x,y)$ (対称関数) であれば，

$$\begin{aligned}\iint_K f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_a^x [f(x,y) + f(y,x)]\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^x [f(x,y) + f(x,y)]\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^x 2\,f(x,y)\,dy\right) dx.\end{aligned}$$

一方，$f(x,y)$ が奇関数のように $f(y,x) = -f(x,y)$ (歪対称関数) であれば，

$$\begin{aligned}\iint_K f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_a^x [f(x,y) + f(y,x)]\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^x [f(x,y) - f(x,y)]\,dy\right) dx = 0.\end{aligned}$$

一般に K 上で連続な関数 $f(x,y)$ について

$$f_s(x,y) = \frac{f(x,y)+f(y,x)}{2}, \quad f_a(x,y) = \frac{f(x,y)-f(y,x)}{2}$$

とすれば, $f_s(y,x) = f_s(x,y)$ (対称関数), $f_a(y,x) = -f_a(x,y)$ (歪対称関数) となるので,

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_a^x 2\,f_s(x,y)\,dy \right) dx.$$