微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 4)
横線図形上の重積分

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

前回は縦線図形上の 2 重積分の計算を考えた.

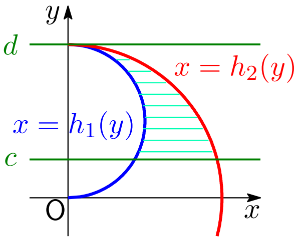
$a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)$ のとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

当然,

$$c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$$

といった横線図形というのも考えられる.



横線図形上の 2 重積分の計算を考える.
2 重積分の定義より, 縦線図形と同様に

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_K \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b \widetilde{f}(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

ここで, $\widetilde{f}(x,y)$ の定義から, 各 y に対して $h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$ 以外では 0 であるから,

$$\int_c^d \Big(\int_a^b \widetilde{f}(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

したがって,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

D: $c \leqq y \leqq d$, $h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$ のとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

感覚的な話だが, D を決める式において

$$\underbrace{\boxed{h_1}}_{y\text{ の式, または定数}} \leqq x \leqq \underbrace{\boxed{h_2}}_{y\text{ の式, または定数}}$$

であれば $x = h_1(y)$ が D の左側の線, $x = h_2(y)$ が D の右側の線,

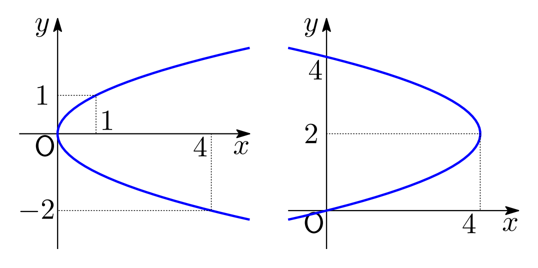
$$\underbrace{\boxed{g_1}}_{x\text{ の式, または定数}} \leqq y \leqq \underbrace{\boxed{g_2}}_{x\text{ の式, または定数}}$$

であれば $y = g_1(x)$ が D の下側の線, $y = g_2(x)$ が D の上側の線.

横線図形を考えるにあたって, $x=y$ の式 という図形をあまり描いたことがない人も多いだろうが, 今後のことを考えると, 慣れていってほしい. 最悪, 通る点を打って結べばいいのだから. しっかり描こう.

例 4.1.

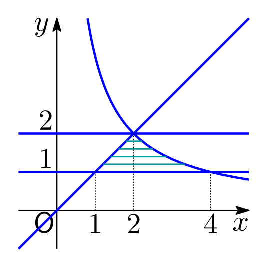
$x=y^2$ および $x=4y-y^2$.



くれぐれも, 描きやすいからといって x 軸と y 軸とを入れ替えた図を作らないように.

例 4.2. $\displaystyle\iint_D x^2y^4\,dx\,dy$, D: $1 \leqq y \leqq 2$, $y \leqq x \leqq \dfrac{4}{y}$.

図示すると, D は横線図形ということがわかる.



注意が必要なのは, 縦線図形としてみると, 場合分けが必要になるということである.

$$1 \leqq x \leqq 4,\ 1 \leqq y \leqq \begin{cases} x & 1 \leqq x \leqq 2, \\ \dfrac{4}{x} & 2 \leqq x \leqq 4. \end{cases}$$

したがって，

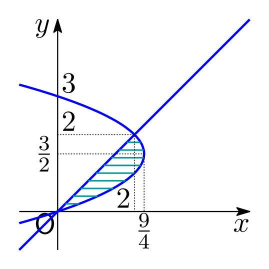
$$\iint_D x^2y^4\,dx\,dy = \int_1^2 \Bigl(\int_y^{\frac{4}{y}} x^2y^4\,dx\Bigr)\,dy = \int_1^2 \Bigl[\frac{1}{3}\,x^3y^4\Bigr]_{x=y}^{x=\frac{4}{y}}\,dy$$

$$= \int_1^2 \frac{64}{3\,y^3}\,y^4 - \frac{1}{3}\,y^3y^4\,dy = \int_1^2 \frac{64}{3}\,y - \frac{1}{3}\,y^7\,dy$$

$$= \Bigl[\frac{64}{3}\times\frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\,y^8\Bigr]_{y=1}^{y=2} = \frac{32}{3}\,(4-1) - \frac{256-1}{24} = 32 - \frac{85}{8} = \frac{171}{8}.$$

例 4.3. $\displaystyle\iint_D y^2\,dx\,dy$, D: $y \leqq x \leqq 3y - y^2$

図示すると, D は横線図形ということがわかる.



さらに, D: $0 \leqq y \leqq 2$, $y \leqq x \leqq 3y - y^2$ ということもわかる.

したがって,

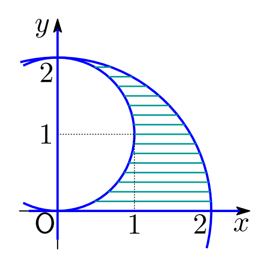
$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \int_0^2 \Big(\int_y^{3y-y^2} y^2\,dx\Big)\,dy = \int_0^2 \Big[y^2\,x\Big]_{x=y}^{x=3y-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^2 y^2\,(3y - y^2 - y)\,dy = \int_0^2 2\,y^3 - y^4\,dy$$

$$= \Big[\frac{2}{4}\,y^4 - \frac{1}{5}\,y^5\Big]_{y=0}^{y=2} = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5}.$$

例 4.4. $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$, D: $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $2y \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$

図示すると, D は横線図形ということがわかる.



さらに, D: $0 \leqq y \leqq 2$, $\sqrt{2y - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{4 - y^2}$ ということもわかる.

したがって,

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^2 \Big(\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx \Big)\,dy = \int_0^2 \Big[\frac{1}{2}\,x^2 \Big]_{x=\sqrt{2y-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\,(\sqrt{4-y^2})^2 - \frac{1}{2}\,(\sqrt{2y-y^2})^2\,dy = \int_0^2 \frac{4-y^2-2y+y^2}{2}\,dy$$

$$= \int_0^2 2-y\,dy = \Big[2\,y - \frac{1}{2}\,y^2 \Big]_{y=0}^{y=2} = 4-2=2.$$