

# 微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 3)

## 縦線図形上の重積分

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

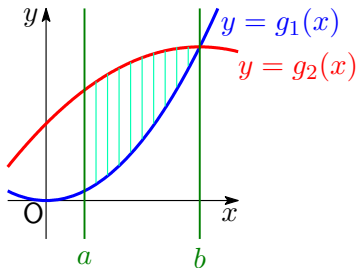
<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

長方形だけでは不十分なので、より一般の平面図形  $D$  上での 2 重積分を計算しよう。そのために、次の定義をする。

$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \quad \text{ただし, } a \leq x \leq b \text{ のとき } g_1(x) \leq g_2(x)$$

で表されるような図形  $D$  を**縦線図形**という。

$y = g_1(x)$  と  $y = g_2(x)$  の間を縦の線で塗りつぶしてできるような図形ということで縦線図形というのである。

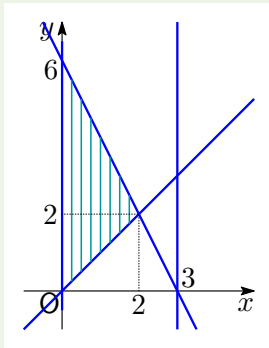


便宜上, 横線図形というものも考えるが, ほとんどの書物では  
まとめて縦線図形と呼んでいるようである.

あらかじめ,  $D$  を縦線図形のように表されていればいいのだが,  
現実として, そうではないケースの方が多い.  
したがって, 積分領域  $D$  は毎回図示することを忘れないように.

例 3.1.  $D: 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 6 - 2x$

一見すると問題なく縦線図形だ, といいたところだが,  
この書き方は不正確な書き方である. 実際に図示すると,



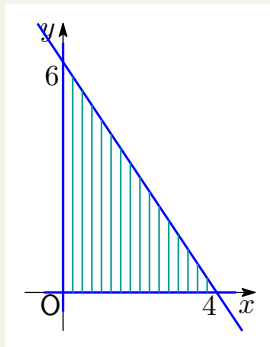
$0 \leq x \leq 2$  であれば,  $x \leq y \leq 6 - 2x$  となる部分があるのだが,  
 $2 < x \leq 3$  のとき,  $6 - 2x < x$  なので,  $x \leq y \leq 6 - 2x$  となる部分がない.  
 $0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 6 - 2x$  とすれば, 正確に  $D$  を表現できている.

もう少し複雑な図形も考えてみよう.

図示する際には境界線を先に描いてしまった方がよい.

例 3.2.  $D: x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 12$ .

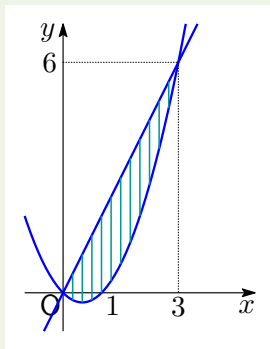
$x = 0$  ( $y$  軸),  $y = 0$  ( $x$  軸),  $3x + 2y = 12$  (つまり  $y = -\frac{3}{2}x + 6$ ) を引く.



$D: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 6$ .

例 3.3.  $D: x^2 - x \leq y \leq 2x$ .

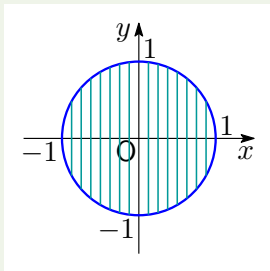
$y = x^2 - x$  (放物線),  $y = 2x$  を引く.



$D: 0 \leq x \leq 3, x^2 - x \leq y \leq 2x$ .

例 3.4.  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

$x^2 + y^2 = 1$  (円) を引く.  $y$  について解けば,  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$  と表せる.



$$D: -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

では、縦線図形において、2重積分はどのように計算できるのであろうか。

$D$  を縦線図形  $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  とする。

このとき、 $D \subset K$  となる長方形  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  がある。

$D$  上の重積分は

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D, \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

を  $K$  上で2重積分したものと定めていたので、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_K \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx.$$

ここで、 $\tilde{f}(x, y)$  の定義から、各  $x$  に対して  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  以外では0であるから、

$$\int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

$D: a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \ (g_1(x) \leq g_2(x))$  のとき,

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

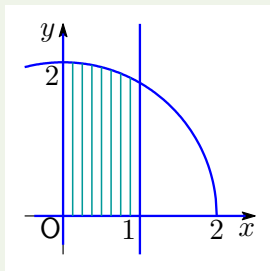
ちなみに,  $f(x, y) \geq 0$  のとき,  $\int_{g_1(k)}^{g_2(k)} f(x, y) \, dy$  は立体

$$a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), 0 \leq z \leq f(x, y)$$

を  $x = k$  で切ってできる断面の面積を表している. 断面積の積分は体積であったから, 上記の計算方法は間違っていない.

例 3.5.  $\iint_D y \, dx \, dy$ ,  $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ .

図示すると,  $D$  は縦線図形ということがわかる.

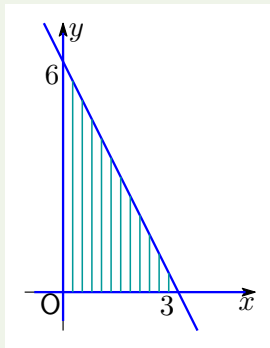


したがって,

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (4 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ 4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \times \frac{11}{3} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

例 3.6.  $\iint_D xy \, dx \, dy$ ,  $D: x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 6$ .

図示すると,  $D$  は縦線図形ということがわかる.



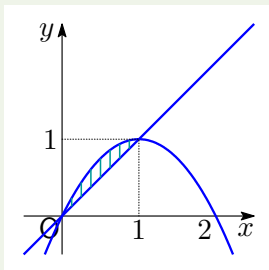
さらに,  $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x$  ということもわかる.

したがって,

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^3 \left( \int_0^{6-2x} xy \, dy \right) dx = \int_0^3 \left[ \frac{x}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=6-2x} dx \\&= \int_0^3 \frac{1}{2} x (6-2x)^2 dx = \int_0^3 2x^3 - 12x^2 + 18x \, dx \\&= \left[ \frac{2}{4} x^4 - \frac{12}{3} x^3 + \frac{18}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{81}{2} - 108 + 81 = \frac{27}{2}.\end{aligned}$$

例 3.7.  $\iint_D x \, dx \, dy$ ,  $D: x \leq y \leq 2x - x^2$ .

図示すると,  $D$  は縦線図形ということがわかる.



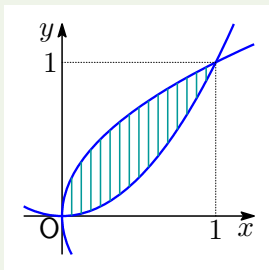
さらに,  $D: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x - x^2$  ということもわかる.

したがって,

$$\begin{aligned}\iint_D x, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_x^{2x-x^2} x dy \right) dx = \int_0^1 \left[ x y \right]_{y=x}^{y=2x-x^2} dx \\&= \int_0^1 x (2x - x^2) - x^2 dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\&= \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

例 3.8.  $\iint_D xy \, dx \, dy$ ,  $D: x^2 \leq y, y^2 \leq x$ .

図示すると,  $D$  は縦線図形ということがわかる.



さらに,  $D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ ということもわかる.

したがって,

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{x}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\&= \int_0^1 \frac{1}{2} x (\sqrt{x})^2 - \frac{1}{2} x (x^2)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^5 dx \\&= \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} \frac{1}{6} x^6 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$