

微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 2)

累次積分の計算

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

前回 2 重積分の定義を考え, $K: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上の 2 重積分の計算公式 (累次積分) を考えた.

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

早速計算練習しよう.

積分する順番は, 好きなようにやっていただいて構わない.
ただし, 順番を間違えると, 計算の難易度が変わったり, 計算そのものができなくなることもあるので注意すること.

例 2.1. $\iint_K x^2 + y^2 dx dy$, $K: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$.

方法 1 y から積分する形で累次積分に直して計算する.

$$\begin{aligned}\iint_K x^2 + y^2 dx dy &= \int_0^2 \left(\int_1^3 x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=1}^{y=3} dx \\&= \int_0^2 (3x^2 - x^2) + \frac{27-1}{3} dx = \int_0^2 2x^2 + \frac{26}{3} dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{26}{3} x \right]_{x=0}^{x=2} \\&= \frac{2}{3} \times 8 + \frac{26}{3} \times 2 = \frac{16+52}{3} = \frac{68}{3}.\end{aligned}$$

方法2 x から積分する形で累次積分に直して計算する.

$$\begin{aligned}\iint_K x^2 + y^2 dx dy &= \int_1^3 \left(\int_0^2 x^2 + y^2 dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^3 \frac{8}{3} + 2 y^2 dy = \left[\frac{8}{3} y + \frac{2}{3} y^3 \right]_{y=1}^{y=3} \\ &= \frac{24 - 8}{3} + \frac{54 - 2}{3} = \frac{16 + 52}{3} = \frac{68}{3}.\end{aligned}$$

やりやすい方で計算すればよい.

例 2.2. $\iint_K (x - y)^3 dx dy$, $K: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

方法 1 y から積分する形で累次積分に直して計算する.

$$\begin{aligned}\iint_K (x - y)^3 dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x - y)^3 dy \right) dx = \int_0^2 \left[-\frac{1}{4} (x - y)^4 \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 -\frac{1}{4} (x - 1)^4 + \frac{1}{4} x^4 dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{5} (x - 1)^5 + \frac{1}{4} \frac{1}{5} x^5 \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= -\frac{1 - (-1)}{20} + \frac{32 - 0}{20} = \frac{-2 + 32}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

方法2 x から積分する形で累次積分に直して計算する.

$$\begin{aligned}\iint_K (x-y)^3 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (x-y)^3 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} (x-y)^4 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\&= \int_0^1 \frac{1}{4} (2-y)^4 - \frac{1}{4} (-y)^4 dy = \int_0^1 \frac{1}{4} (y-2)^4 - \frac{1}{4} y^4 dy \\&= \left[\frac{1}{4} \frac{1}{5} (y-2)^5 - \frac{1}{4} \frac{1}{5} y^5 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{-1 - (-32)}{20} - \frac{1-0}{20} \\&= \frac{-1 + 32 - 1 + 0}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

どちらを先にするのかは重要になる場合もある.

例 2.3. $\iint_K x e^{xy} dx dy$, $K: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$.

方法 1 y から積分する形で累次積分に直して計算する.

$$\begin{aligned}\iint_K x e^{xy} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_1^2 x e^{xy} dy \right) dx \\&= \int_1^2 \left[e^{xy} \right]_{y=1}^{y=2} dx \quad (e^{xy})_y = x e^{xy} \text{ に注意} \\&= \int_1^2 e^{2x} - e^x dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right]_{x=1}^{x=2} \\&= \frac{e^4 - e^2}{2} - (e^2 - e^1) = \frac{e^4 - e^2 - 2e^2 + 2e}{2} = \frac{e^4 - 3e^2 + 2e}{2}.\end{aligned}$$

こちらはそこまで大変ではなかった.

方法2 x から積分する形で累次積分に直して計算する. まず,

$$\iint_K x e^{xy} dx dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 x e^{xy} dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{xy - 1}{y^2} e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} dy$$

ただし, 積分は次の部分積分を行った.

$$\begin{aligned} \int x e^{xy} dx &= \int x \left(\frac{1}{y} e^{xy} \right)_x dx = x \left(\frac{1}{y} e^{xy} \right) - \int (x)_x \left(\frac{1}{y} e^{xy} \right) dx \\ &= \frac{x}{y} e^{xy} - \int \frac{1}{y} e^{xy} dx = \frac{x}{y} e^{xy} - \frac{1}{y} \frac{1}{y} e^{xy} = \frac{xy - 1}{y^2} e^{xy}. \end{aligned}$$

続いて,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\frac{xy-1}{y^2} e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} dy &= \int_1^2 \frac{2y-1}{y^2} e^{2y} - \frac{y-1}{y^2} e^y dy \\ &= \left[\frac{1}{y} e^{2y} - \frac{1}{y} e^y \right]_{y=1}^{y=2}.\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{y} e^{ay} \right)_y &= \left(\frac{1}{y} \right)_y e^{ay} + \frac{1}{y} (e^{ay})_y = -\frac{1}{y^2} e^{ay} + \frac{1}{y} a e^{ay} = \frac{-1 + ay}{y^2} e^{ay}.\end{aligned}$$
$$\therefore \int \frac{ay-1}{y^2} e^{ay} dy = \frac{1}{y} e^{ay}.$$

以上から,

$$\begin{aligned}\iint_K x e^{xy} dx dy &= \cdots = \left[\frac{1}{y} e^{2y} - \frac{1}{y} e^y \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^4 - e^2 \right) - \left(\frac{1}{2} e^2 - e^1 \right) = \frac{e^4 - 3e^2 + 2e}{2}.\end{aligned}$$

こちらは非常に面倒な計算になってしまった.

もし, $f(x, y) = A(x) B(y)$ のように変数分離形である場合,
 K : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ であるならば,

$$\begin{aligned} & \iint_K A(x) B(y) dx dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b A(x) B(y) dx \right) dy = \int_c^d B(y) \left(\int_a^b A(x) dx \right) dy \\ &= \int_c^d B(y) \left(\int_a^b A(x) dx \right) dy = \left(\int_a^b A(x) dx \right) \int_c^d B(y) dy \\ &= \left(\int_a^b A(x) dx \right) \left(\int_c^d B(y) dy \right). \end{aligned}$$

このように, 2つの定積分の積で計算できてしまう.

例 2.4. $\iint_K e^x \sin y \, dx \, dy$, $K: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \pi$.

K は長方形で, 被積分関数 $e^x \sin y$ が変数分離形であるから,

$$\begin{aligned}\iint_K e^x \sin y \, dx \, dy &= \left(\int_0^3 e^x \, dx \right) \left(\int_0^\pi \sin y \, dy \right) \\ &= \left[e^x \right]_{x=0}^{x=3} \left[-\cos y \right]_{y=0}^{y=\pi} = (e^3 - e^0) \times \{ -(-1) - (-1) \} \\ &= 2(e^3 - 1).\end{aligned}$$

ここではあまり使わなかったが, $K: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ を $[a, b] \times [c, d]$ と表し, これを 2 次元における区間ということがある.

気づいている人も多いかもしれないが, 2 重積分には不定積分というものを考えることはない.

無理やり考えようとする, 平面図形から実数への関数 (写像) となるので使い道が非常に限られる.

今後は, より複雑な図形 D 上における 2 重積分の計算方法を考えていく.

図形は図示した方がいいので, 図が汚いという人は定規やコンパスなどを準備して臨むのが望ましいと考える.