

微分積分 4(重積分) 自習スライド (Part 1)

重積分の定義

鈴木 敏行

神奈川大学

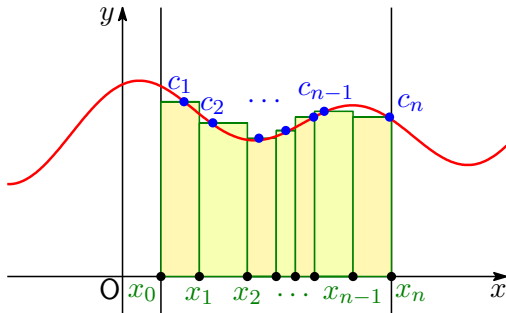
2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

今回から, 2 変数関数の積分である 2 重積分を考えていくことにする.
まずは定義をしないと計算も何もできないので, 定義を考えていこう.
さて, 1 変数関数の定積分の定義は次の通りであった.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) (x_k - x_{k-1}).$$



$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

$$|\Delta x| = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}).$$

$$S(\Delta; c) = \sum_{k=1}^n f(c_k) (x_k - x_{k-1}).$$

$|\Delta x| \rightarrow 0$ としたとき, c_k の選び方によらずに等しい値に近づくとき, その値をこの図形の面積 (定積分) と定めよう.

- 定積分で求めたかったものは グラフ下にある図形の面積の計算
- どうやって考えるかというと 短冊状(長方形)に切って各断片の面積を考え, 足し合わせた
- 誤差の調整は 細かく切っていく

では, 2重積分に相当するするものを考えるにあたって

- 求めたいものは グラフ下にある図形の体積の計算
- どうやって考えるかというと 短冊状(直方体)に切って各断片の体積を考え, 足し合わせる
- 誤差の調整は 細かく切っていく

グラフ下にある立体の体積を求めたいのだが, 底面の形を簡単にするため, まずは長方形に限定して考える.

K を長方形 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ とする.

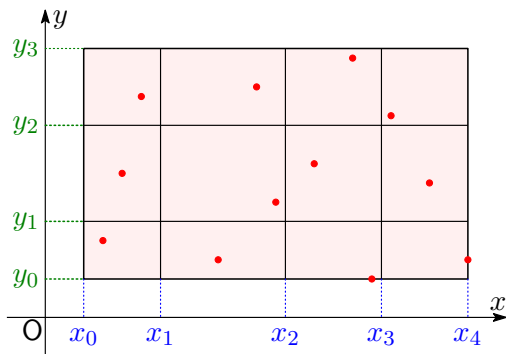
はじめに x の分割および y の分割を考える:

$$\Delta x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_m = b,$$

$$\Delta y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < \cdots < y_n = d,$$

$$|\Delta x| = \max_i (x_i - x_{i-1}), \quad |\Delta y| = \max_j (y_j - y_{j-1}).$$

各微小長方形 K_{ij} : $x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$ 上の適当な点を $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ とする.



直方体の体積は 縦 $\times$ 横 $\times$ 高さ であり 底面積 $\times$ 高さ なので、
考えていた立体の体積の一部分は

$$f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}).$$

これを足し合わせれば、元の立体の体積の近似になっているはずである.

$$\sum_{i,j} f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}).$$

誤差は、あらかじめ細かく切っておけば、それだけ小さくなってくれるはずなので、 $(|\Delta x|, |\Delta y|) \rightarrow (0, 0)$ のときの極限值を考える必要がある。

このとき、どのように $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ を選んでも、同じ値に近づくとき、 $f(x, y)$ は K 上で **2重積分可能** であるといい、その極限值を **2重積分** といい、式で次のように書き表す。

$$\iint_K f(x, y) dx dy$$

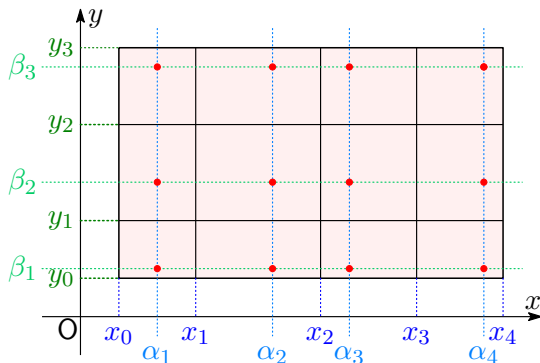
$\sum$ が $\int$ に、 $x_i - x_{i-1}$ が dx に、というのは定積分と同じである。
 $\int$ の個数が 2 個、 dx , dy と d^* が 2 個である。

定義は出来たものの、計算がこのままではできないため、計算できる方法を考えよう。

$f(x, y)$ が K 上で 2 重積分可能な関数とする。

$$\lim_{\substack{(|\Delta x|, |\Delta y|) \\ \rightarrow (0, 0)}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = \iint_K f(x, y) dx dy.$$

さて、 $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ の選び方を (α_i, β_j) としよう。



このとき、極限值をとる前のものは

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n f(\alpha_i, \beta_j) (y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) \quad \Leftarrow (a) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m f(\alpha_i, \beta_j) (x_i - x_{i-1}) \right) (y_j - y_{j-1}) \quad \Leftarrow (b) \end{aligned}$$

と変形できる.

ここで, (a) において, $|\Delta y| \rightarrow 0$ とすれば,

$$\sum_{j=1}^n f(\alpha_i, \beta_j) (y_j - y_{j-1}) \rightarrow \int_c^d f(\alpha_i, y) dy = F(\alpha_i).$$

すると, (a) は $\sum_{i=1}^m F(\alpha_i) (x_i - x_{i-1})$ に近づく. 更に $|\Delta x| \rightarrow 0$ とすれば,

$$\sum_{i=1}^m F(\alpha_i) (x_i - x_{i-1}) \rightarrow \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

これは 2 重積分に一致するのだから,

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

同様にして, (b) において, 先に $|\Delta x| \rightarrow 0$ とすれば

$$\sum_{i=1}^m f(\alpha_i, \beta_j) (x_i - x_{i-1}) \rightarrow \int_a^b f(x, \beta_j) dx = G(\beta_j).$$

更に $|\Delta y| \rightarrow 0$ とすれば,

$$\sum_{j=1}^n G(\beta_j) (y_j - y_{j-1}) \rightarrow \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

これは 2 重積分に一致するのだから,

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

以上から、長方形上の2重積分の計算公式ができた。

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

この定積分2回やっているような積分の計算を**累次積分**という。

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y)$$

という書き方をされることが多いが、この講義では原則として

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

と書くことにする。

ところで,

$$F(\alpha) = \int_c^d f(\alpha, y) dy$$

は立体 $V: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)$ を $x = \alpha$ で切断したときに現れる断面の面積を表しており, それを積分しているから累次積分によって確かに体積が計算できていることに注意しよう.

同様に,

$$G(\beta) = \int_a^b f(x, \beta) dx$$

は V を $y = \beta$ で切断したときに現れる断面の面積を表しており, それを積分して体積が得られるから, 累次積分によって2重積分が計算できるということに注意する.

さて、底面が長方形でない場合に、2重積分を考えたい。
底面の図形を D とし、そのうえでの2重積分を次のように定義する。
まず、 D を含むような長方形を考える。次に、 K 上の関数

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D, \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

を定義する。そのうえで

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_K \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy$$

と2重積分を定義する。

実際のところ, 上のように定義できるためには, D が面積確定な図形である必要がある.

面積確定とは

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D, \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

が $D \subset K$ となる長方形 K 上で 2 重積分可能である図形のことである.

実は D の面積は,

$$\iint_K \chi_D(x, y) dx dy$$

で計算できる (値は K の取り方によらない).

これは, 複雑な形をした領土や敷地の面積をメッシュ状に切って, 数え上げていく方法と完全に同じである.

今後扱う図形は, 原則的に面積確定の図形である.