

微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 6)

テイラー展開

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

一般に n 次偏導関数すべてが連続となる関数 $f(x, y)$ を C^n 級という.

- C^1 級するとき, 全微分可能といえることができる.
- C^2 級するとき, $f_{xy} = f_{yx}$ がいえる.

例えば, 3 次偏導関数は $2^3 = 8$ 個ある. $f(x, y)$ が C^3 級するとき,

$$f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx}, f_{yyy}$$

f_{xxx} と同じもの	f_{xxx}	1 個
f_{xxy} と同じもの	$f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx}$	3 個
f_{xyy} と同じもの	$f_{xyy}, f_{yxy}, f_{yyx}$	3 個
f_{yyy} と同じもの	f_{yyy}	1 個

4 次偏導関数は $2^4 = 16$ 個ある. $f(x, y)$ が C^4 級の時,

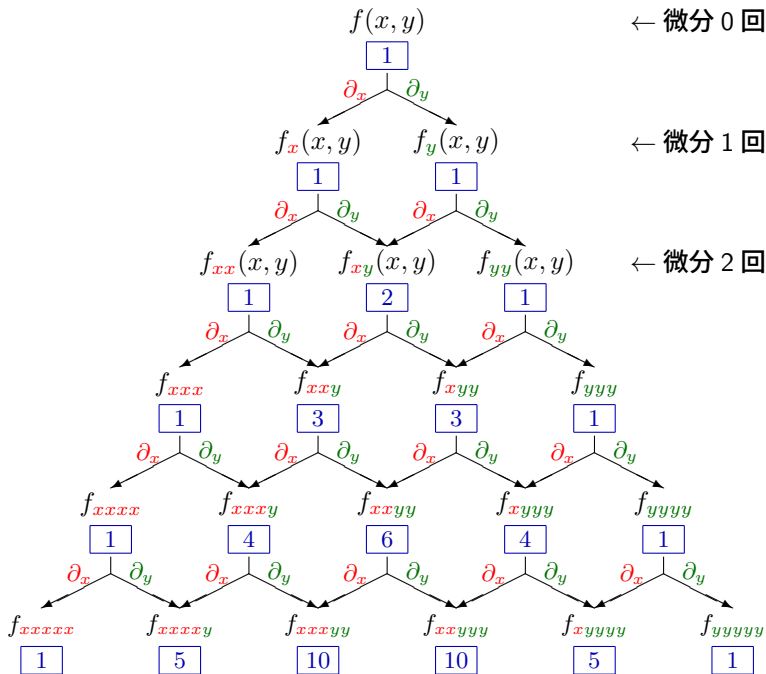
$f_{xxxx}, f_{xxxxy}, f_{xxxyx}, f_{xxyxy}, f_{xyxx}, f_{xyxy}, f_{xyyx}, f_{xyyy},$
 $f_{yxxx}, f_{yxyx}, f_{yyxx}, f_{yyxy}, f_{yyyx}, f_{yyyy}$

f_{xxxx} と同じもの	f_{xxxx}	1 個
f_{xxxxy} と同じもの	$f_{xxxxy}, f_{xxxyx}, f_{xxyxy}, f_{yxxx}$	4 個
f_{xxyxy} と同じもの	$f_{xxyxy}, f_{xyxx}, f_{xyyx}, f_{yxyx}, f_{yyxx}, f_{yyxy}$	6 個
f_{xyyy} と同じもの	$f_{xyyy}, f_{yxyy}, f_{yyxy}, f_{yyyy}$	4 個
f_{yyyy} と同じもの	f_{yyyy}	1 個

n 次偏導関数は 2^n 個ある. $f(x, y)$ が C^n 級の時,

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^r \partial x^{n-r}} = f \underbrace{x \cdots x}_{n-r \text{ 個}} \underbrace{y \cdots y}_{r \text{ 個}}$$

と同じものは ${}_nC_r$ 個ある.



2 変数関数に対しても、テイラー展開・マクローリン展開が考えられるので、やってみよう。

そのために、1 変数関数のマクローリン展開をおさらいしておこう。

$f(x)$ が $x = 0$ の近くで C^n 級であれば、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} x^n$$

となる c_x が 0 と x の間にある。

最初の数項を書きだすと

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4.$$

2 変数関数のマクローリン展開: ちょっと雑な考え方

$f(x, y)$ のマクローリン展開を, まずは x を変数としたもので作ってみる.
 y はただの文字として扱う.

$$f(0, y) + f_x(0, y) x + \frac{f_{xx}(0, y)}{2} x^2 + \frac{f_{xxx}(0, y)}{6} x^3 + \dots$$

各係数は y の関数なので, y を変数としたマクローリン展開を作る.

$$\begin{aligned} & f(0, y) \cdots f(0, 0) + f_y(0, 0) y + \frac{f_{yy}(0, 0)}{2} y^2 + \frac{f_{yyy}(0, 0)}{6} y^3 + \dots \\ & f_x(0, y) \cdots f_x(0, 0) + f_{xy}(0, 0) y + \frac{f_{xyy}(0, 0)}{2} y^2 + \frac{f_{xyyy}(0, 0)}{6} y^3 + \dots \\ & f_{xx}(0, y) \cdots f_{xx}(0, 0) + f_{xxy}(0, 0) y + \frac{f_{xxyy}(0, 0)}{2} y^2 + \frac{f_{xxyyy}(0, 0)}{6} y^3 + \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

これを x を変数にしたマクローリン展開の係数代入して, x, y ともに変数だと思って, 次数の小さい方から並べ変えていくと,

$$\begin{aligned}
 & f(0,0) + f_y(0,0)y + \frac{f_{yy}(0,0)}{2}y^2 + \frac{f_{yyy}(0,0)}{6}y^3 + \dots \\
 & + x \left(f_x(0,0) + f_{xy}(0,0)y + \frac{f_{xyy}(0,0)}{2}y^2 + \frac{f_{xyyy}(0,0)}{6}y^3 + \dots \right) \\
 & + \frac{1}{2}x^2 \left(f_{xx}(0,0) + f_{xxy}(0,0)y + \frac{f_{xxyy}(0,0)}{2}y^2 + \frac{f_{xxyyy}(0,0)}{6}y^3 + \dots \right) \\
 & + \frac{1}{6}x^3 \left(f_{xxx}(0,0) + f_{xxxy}(0,0)y + \frac{f_{xxxyy}(0,0)}{2}y^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{f_{xxxyyy}(0,0)}{6}y^3 + \dots \right) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\
&+ \frac{f_{xx}(0,0)}{2}x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{f_{yy}(0,0)}{2}y^2 \\
&+ \frac{f_{xxx}(0,0)}{6}x^3 + \frac{f_{xxy}(0,0)}{2}x^2y + \frac{f_{xyy}(0,0)}{2}xy^2 + \frac{f_{yyy}(0,0)}{6}y^3 \\
&+ \frac{f_{xxxx}(0,0)}{24}x^4 + \frac{f_{xxxy}(0,0)}{6}x^3y + \frac{f_{xxyy}(0,0)}{4}x^2y^2 \\
&\quad + \frac{f_{xyyy}(0,0)}{6}xy^3 + \frac{f_{yyyy}(0,0)}{24}y^4 \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

一般に, $x^\ell y^m$ の係数は $\frac{1}{\ell!} \frac{1}{m!} \underbrace{f_{x \cdots x}}_{\ell \text{ 個}} \underbrace{y \cdots y}_{m \text{ 個}}(0,0)$ になりそう.

以上の話は、結果はいいのだが、数学的には乱暴すぎて正しくない。
マクローリン展開はどんな x であっても収束するわけではなかった。
また、無限級数は無条件に順番を変えてはいけない。

途中で止める場合にはどうすればいいのかもはっきりしない。

では、どうすればいいのか？

$z(t) = f(tx, ty)$ の t についてのマクローリン展開を考えてみよう。
 $t = 1$ にすれば、 $f(x, y)$ のマクローリン展開が出てくる。

$z(t) = f(tx, ty)$ を t でどんどん微分していこう.

$f(x, y)$ を C^n 級としておけば, とりあえず $z(t)$ は n 回微分でき, 合成関数の微分法も使える.

$$z'(t) = f_x(tx, ty) x + f_y(tx, ty) y.$$

$$\begin{aligned} z''(t) &= \{f_{xx}(tx, ty) x + f_{xy}(tx, ty) y\} x + \{f_{yx}(tx, ty) x + f_{yy}(tx, ty) y\} y \\ &= f_{xx}(tx, ty) x^2 + 2 f_{xy}(tx, ty) xy + f_{yy}(tx, ty) y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'''(t) &= \{f_{xxx} x + f_{xxy} y\} x^2 + 2 \{f_{xyx} x + f_{xyy} y\} xy \\ &\quad + \{f_{yyx} x + f_{yyy} y\} y^2 \\ &= f_{xxx} x^3 + 3 f_{xxy} x^2 y + 3 f_{xyy} xy^2 + f_{yyy} y^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''''(t) &= \{f_{xxxx} x + f_{xxx y} y\} x^3 + 3 \{f_{xxyx} x + f_{xxyy} y\} x^2 y \\ &\quad + 3 \{f_{xyyx} x + f_{xyyy} y\} xy^2 + \{f_{yyyx} x + f_{yyyy} y\} y^3 \\ &= f_{xxxx} x^4 + 4 f_{xxy} x^3 y + 6 f_{xxyy} x^2 y^2 + 4 f_{xyyy} xy^3 + f_{yyyy} y^4. \end{aligned}$$

一般に, $f(x, y)$ の k 次偏導関数の分類を考えていくと,

$$z^{(k)}(t) = \sum_{\ell=0}^k k C_{\ell} \underbrace{f x \cdots x}_{k-\ell \text{個}} \underbrace{y \cdots y}_{\ell \text{個}}(tx, ty) x^{k-\ell} y^{\ell}$$

となっている. 以上の式を, 2 項定理になぞらえて

$$z^{(k)}(t) = \left(\textcolor{red}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \textcolor{red}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(tx, ty)$$

という記号を用いて書くことがあるが, これは混乱が生じるため, あまり使わない方がいい. ここでは

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(tx, ty) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$$

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(tx, ty) &= \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (tx, ty) \\ &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, ty) \end{aligned}$$

と解釈している.

通常は次のように解釈される。

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(tx, ty) &= x \{f(tx, ty)\}_x + y \{f(tx, ty)\}_y \\ &= tx f_x(tx, ty) + ty f_y(tx, ty) \\ \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(tx, ty) &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(tx, ty) \\ &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) \{tx f_x(tx, ty) + ty f_y(tx, ty)\} \\ &= x \{tx f_x(tx, ty) + ty f_y(tx, ty)\}_x + y \{tx f_x(tx, ty) + ty f_y(tx, ty)\}_y \\ &= x \{t f_x(tx, ty) + tx f_{xx}(tx, ty) t + ty f_{yx}(tx, ty) t\} \\ &\quad + y \{tx f_{xy}(tx, ty) t + t f_y(tx, ty) + ty f_{yy}(tx, ty) t\} \\ &= tx f_x(tx, ty) + ty f_y(tx, ty) \\ &\quad + (tx)^2 f_{xx}(tx, ty) + 2 (tx)(ty) f_{xy}(tx, ty) + (ty)^2 f_{yy}(tx, ty) \end{aligned}$$

スライドでは色を分けて書いているので問題ないが... 色がついているところが x や y と関係ないものであったら (ほぼ) 問題なく解釈できる。

2 変数関数のマクローリンの定理

準備ができたので、まとめておこう.

$f(x, y)$ は $(0, 0)$ の近傍で C^n 級とする.

このとき、次を満たす θ が $0 < \theta < 1$ に存在する.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \{ f_x(0, 0) x + f_y(0, 0) y \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(0, 0) x^2 + 2 f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0, 0) y^2 \} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \underbrace{f_{x \cdots x}_{n-1-\ell} y \cdots y}_{\ell \text{ 個}}(0, 0) x^{n-1-\ell} y^\ell \\ &\quad + \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \underbrace{f_{x \cdots x}_{n-\ell} y \cdots y}_{\ell \text{ 個}}(\theta x, \theta y) x^{n-\ell} y^\ell. \end{aligned}$$

剰余項 R_n

$z(t) = f(tx, ty)$ は C^n 級なので, 1 変数関数のマクローリンの定理より

$$z(t) = z(0) + z'(0)t + \frac{z''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{z^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{z^{(n)}(c)}{n!}t^n$$

となる c が 0 と t の間にある.

$t = 1$ のときの c を θ とおく. また,

$$z^{(k)}(t) = \sum_{\ell=0}^k kC_{\ell} \underbrace{f x \cdots x}_{k-\ell \text{ 個}} \underbrace{y \cdots y}_{\ell \text{ 個}}(tx, ty) x^{k-\ell} y^{\ell}$$

だったので, これを 1 変数のマクローリンの定理に代入すれば, 所要の式が得られる.

マクローリン展開で出てくる多項式がマクローリン級数なわけだが、4 次の項まで書き出してみると、次の通りである。

$$\begin{aligned} & f(0,0) + \{f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\} \\ & + \frac{1}{2} \{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\} \\ & + \frac{1}{6} \{f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3\} \\ & + \frac{1}{24} \{f_{xxxx}(0,0)x^4 + 4f_{xxxy}(0,0)x^3y + 6f_{xxyy}(0,0)x^2y^2 \\ & \quad + 4f_{xyyy}(0,0)xy^3 + f_{yyyy}(0,0)y^4\}. \end{aligned}$$

これを展開すれば、先ほど形式的に計算してできたものと同じものが出てくる。

テイラーの定理

$z(t) = f(a + th, b + tk)$ とすれば、テイラーの定理を証明することができる.

$f(x, y)$ は (a, b) の近傍で C^n 級とする.

このとき、次を満たす θ が $0 < \theta < 1$ に存在する.

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \{f_x(a, b)h + f_y(a, b)k\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2\} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f \right\} (a, b) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left\{ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right\} (a + \theta h, b + \theta k). \end{aligned}$$

剰余項 R_n

なお、 $h = x - a$, $k = y - b$ と書き直してもよい.

今後使う $n = 2$ の場合書き出すと,

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + f_x(a, b) h + f_y(a, b) k \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(\tilde{a}, \tilde{b}) h^2 + 2 f_{xy}(\tilde{a}, \tilde{b}) h k + f_{yy}(\tilde{a}, \tilde{b}) k^2 \}. \end{aligned}$$

ただし, $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (a + \theta h, b + \theta k)$ とする.

例 6.1.

$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 4y$ について,

$$f_x = 2x + 2y - 6, \quad f_y = 2x + 6y - 4,$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 2, \quad f_{yy} = 6.$$

$$f(1, 1) = -4, \quad f_x(1, 1) = -2, \quad f_y(1, 1) = 4,$$

$$f_{xx}(1, 1) = 2, \quad f_{xy}(1, 1) = 2, \quad f_{yy}(1, 1) = 6.$$

したがって, $f(x, y)$ のテイラー級数を 2 次まで求めると,

$$\begin{aligned} & -4 + (-2)(x-1) + 4(y-1) \\ & + \frac{1}{2} \{ 2(x-1)^2 + 2 \times 2(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2 \} \\ & = -4 - 2(x-1) + 4(y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2. \end{aligned}$$

$f(x, y)$ は 2 次式なのだから, 以上の式は $f(x, y)$ と完全に一致する.

もし, $f(x, y)$ が n 次多項式であれば, $f(x, y)$ のテイラー展開は n 次の項で完成する (それ以上の項は 0 である).

多項式ではない関数については, テイラー級数やマクローリン級数が元の関数に一致するかどうかについては, 剰余項次第である.

理論的に 2 変数関数のテイラーの定理やマクローリン展開は必要である. しかし, 証明でも見たように, 1 変数関数のテイラーの定理やマクローリン展開がちゃんとわかっていれば事足りるであろう.

具体的な2変数関数のマクローリン展開を考える.

マクローリン級数を3次の項まで書き出してみると, 次の通りであった.

$$\begin{aligned} & f(0, 0) + \{f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y\} \\ & + \frac{1}{2} \{f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\} \\ & + \frac{1}{6} \{f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3\}. \end{aligned}$$

例 6.2. $f(x, y) = \sqrt{1 + 3x - y}$ のマクローリン級数 (2 次まで)

まず, 2 次偏導関数までを求める.

$$f = (1 + 3x - y)^{\frac{1}{2}}.$$

$$f_x = \frac{1}{2} (1 + 3x - y)^{\frac{1}{2}-1} (1 + 3x - y)_x = \frac{3}{2} (1 + 3x - y)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f_y = \frac{1}{2} (1 + 3x - y)^{\frac{1}{2}-1} (1 + 3x - y)_y = -\frac{1}{2} (1 + 3x - y)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f_{xx} = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (1 + 3x - y)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + 3x - y)_x = -\frac{9}{4} (1 + 3x - y)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$f_{xy} = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (1 + 3x - y)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + 3x - y)_y = \frac{3}{4} (1 + 3x - y)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$f_{yy} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (1 + 3x - y)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + 3x - y)_y = -\frac{1}{4} (1 + 3x - y)^{-\frac{1}{2}}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1, & f_x(0,0) &= \frac{3}{2}, & f_y(0,0) &= -\frac{1}{2}, \\ f_{xx}(0,0) &= -\frac{9}{4}, & f_{xy}(0,0) &= \frac{3}{4}, & f_{yy}(0,0) &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

それゆえに,

$$\begin{aligned} & 1 + \left\{ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \right\} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{9}{4}x^2 + 2 \times \frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}y^2 \right\} \\ &= 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{1}{8}y^2. \end{aligned}$$

先ほどの例については、次のような別解がある。

$t = 3x - y$, $g(t) = \sqrt{1+t}$ とみると, $f(x, y) = g(t)$ である。
 x と y の k 次の項は t の k 次の項にしか現れないことに注意する。
 $g(t)$ の 2 次までのマクローリン級数を求める。

$$g(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

$$g(0) = 1. \quad c_0 = 1.$$

$$g'(t) = \frac{1}{2} (1+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$g'(0) = \frac{1}{2}. \quad c_1 = \frac{1}{2}.$$

$$g''(t) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (1+t)^{-\frac{3}{2}}. \quad g''(0) = -\frac{1}{4}. \quad c_2 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

したがって, $1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2$. $t = 3x - y$ を代入すれば,

$$1 + \frac{1}{2}(3x - y) - \frac{1}{8}(3x - y)^2 = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{1}{8}y^2.$$

例 6.3. $f(x, y) = e^y \log(1 + x)$ のマクローリン級数 (2 次まで)
まず, 2 次偏導関数までを求める.

$$\begin{aligned} f &= e^y \log(1 + x), & f_x &= e^y \frac{1}{1 + x}, & f_y &= e^y \log(1 + x). \\ f_{xx} &= e^y \frac{-1}{(1 + x)^2}, & f_{xy} &= e^y \frac{1}{1 + x}, & f_{yy} &= e^y \log(1 + x). \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & f_x(0, 0) &= 1, & f_y(0, 0) &= 0, \\ f_{xx}(0, 0) &= -1, & f_{xy}(0, 0) &= 1, & f_{yy}(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

それゆえに,

$$0 + \{1x + 0y\} + \frac{1}{2} \{-1x^2 + 2 \times 1xy + 0y^2\} = x - \frac{1}{2}x^2 + xy.$$

先ほどの例については、次のような別解がある。

$g_1(x) = \log(1+x)$ および $g_2(y) = e^y$ の2次までのマクローリン級数を求めると

$$g_1(x) = \log(1+x), \quad g_1(0) = 0, \quad c_0 = 0.$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad g_1'(0) = 1, \quad c_1 = 1.$$

$$g_1''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad g_1''(0) = -1, \quad c_2 = \frac{1}{2} \times -1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore g_1(x) \text{ のマクローリン級数は } 0 + 1x - \frac{1}{2}x^2 = x - \frac{1}{2}x^2.$$

$$g_2(y) = e^y, \quad g_2(0) = 1, \quad c_0 = 1.$$

$$g_2'(y) = e^y, \quad g_2'(0) = 1, \quad c_1 = 1.$$

$$g_2''(y) = e^y, \quad g_2''(0) = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore g_2(y) \text{ のマクローリン級数は } 1 + 1y + \frac{1}{2}y^2 = 1 + y + \frac{1}{2}y^2.$$

$f(x, y) = g_1(x) g_2(y)$ であるから, $f(x, y)$ のマクローリン級数を 2 次まで求めるのに $g_1(x)$ や $g_2(y)$ のマクローリン級数の 3 次以上の項は無関係である. したがって,

$$\left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2\right) = x + xy + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2y^2.$$

2 次までの項を取り出せばよいので, 求めるマクローリン級数は

$$x - \frac{1}{2}x^2 + xy.$$

このように, $f(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y)$ となっている場合には, $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ のマクローリン級数を求めて, それを掛け算して展開して整理する方法で求めることもできる.

先ほど紹介した別解を用いて、普通にやると計算が大変なマクローリン級数を求めてみよう.

例 6.4. $f(x, y) = \frac{e^{3x+y}}{1+x-y}$ のマクローリン級数 (2 次まで)

まず, $f_1(x, y) = e^{3x+y}$ のマクローリン級数を求める. これは $g_1(t) = e^t$ のマクローリン級数に $t = 3x + y$ を代入すればよい.

$$g_1(t) \Rightarrow 1 + t + \frac{1}{2} t^2. \quad \therefore 1 + (3x + y) + \frac{1}{2} (3x + y)^2.$$

次に, $f_2(x, y) = \frac{1}{1+x-y}$ のマクローリン級数を求める. これは

$g_2(t) = \frac{1}{1+t}$ のマクローリン級数に $t = x - y$ を代入すればよい.

$$g_2(t) \Rightarrow 1 - t + t^2. \quad \therefore 1 - (x - y) + (x - y)^2.$$

これらを掛け合わせて、2 次以下の項を取り出す.

$$\begin{aligned}& \left\{ 1 + (3x + y) + \frac{1}{2} (3x + y)^2 \right\} \left\{ 1 - (x - y) + (x - y)^2 \right\} \\&= 1 - (x - y) + (x - y)^2 \\&\quad + (3x + y) - (3x + y)(x - y) + (3x + y)(x - y)^2 \\&\quad + \frac{1}{2} (3x + y)^2 - \frac{1}{2} (3x + y)^2 (x - y) + \frac{1}{2} (3x + y)^2 (x - y)^2 \\&\Rightarrow 1 - (x - y) + (x - y)^2 + (3x + y) - (3x + y)(x - y) + \frac{1}{2} (3x + y)^2 \\&= 1 - x + y + x^2 - 2xy + y^2 + 3x + y \\&\quad - 3x^2 + 2xy + y^2 + \frac{9}{2}x^2 + 3xy + \frac{1}{2}y^2 \\&= 1 + 2x + 2y + \frac{5}{2}x^2 + 3xy + \frac{5}{2}y^2.\end{aligned}$$

以上より, 求めるマクローリン級数は

$$1 + 2x + 2y + \frac{5}{2}x^2 + 3xy + \frac{5}{2}y^2.$$

補足. $g_2(t) = \frac{1}{1+t}$ のマクローリン級数

次のように計算できる.

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1}. & g_2(0) &= 1. & c_0 &= 1. \\ g_2'(t) &= -(1+t)^{-2}. & g_2'(0) &= -1. & c_1 &= -1. \\ g_2''(t) &= 2(1+t)^{-3}. & g_2''(0) &= 2. & c_2 &= \frac{1}{2} \times 2 = 1. \end{aligned}$$

$\therefore g_2(t)$ のマクローリン級数は $1 - 1t + 1t^2 = 1 - t + t^2$.

例 6.5. $f(x, y) = \sin(3x - 2y)$ のマクローリン級数 (3 次まで)

これは $g(t) = \sin t$ のマクローリン級数に $t = 3x - 2y$ を代入すればよい.

$$g(t) = \sin t. \quad g(0) = 0. \quad c_0 = 0.$$

$$g'(t) = \cos t. \quad g'(0) = 1. \quad c_1 = 1.$$

$$g''(t) = -\sin t. \quad g''(0) = 0. \quad c_2 = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

$$g'''(t) = -\cos t. \quad g'''(0) = -1. \quad c_3 = \frac{1}{6} \times -1 = -\frac{1}{6}.$$

$$\therefore g(t) \text{ のマクローリン級数は } 0 + 1t + 0t^2 - \frac{1}{6}t^3 = t - \frac{1}{6}t^3.$$

これに $t = 3x - 2y$ を代入すれば, $(3x - 2y) - \frac{1}{6}(3x - 2y)^3$.

原則ルール通りやらないといけないものもあるので、
最後はそれを扱うことにする。

例 6.6. $f(x, y) = \log(1 + 2xy - x + 3y)$ のマクローリン級数 (2 次まで)

まず、2 次偏導関数までを求める。

$$f = \log(1 + 2xy - x + 3y).$$

$$f_x = \frac{(1 + 2xy - x + 3y)_x}{1 + 2xy - x + 3y} = \frac{2y - 1}{1 + 2xy - x + 3y}.$$

$$f_y = \frac{(1 + 2xy - x + 3y)_y}{1 + 2xy - x + 3y} = \frac{2x + 3}{1 + 2xy - x + 3y}.$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{(2y - 1)_x (1 + 2xy - x + 3y) - (2y - 1) (1 + 2xy - x + 3y)_x}{(1 + 2xy - x + 3y)^2} \\ &= \frac{-(2y - 1)(2y - 1)}{(1 + 2xy - x + 3y)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{xy} &= \frac{(2y-1)_y (1+2xy-x+3y) - (2y-1) (1+2xy-x+3y)_y}{(1+2xy-x+3y)^2} \\
 &= \frac{2(1+2xy-x+3y) - (2y-1)(2x+3)}{(1+2xy-x+3y)^2} = \frac{5}{(1+2xy-x+3y)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{yy} &= \frac{(2x+3)_y (1+2xy-x+3y) - (2x+3) (1+2xy-x+3y)_y}{(1+2xy-x+3y)^2} \\
 &= \frac{-(2x+3)(2x+3)}{(1+2xy-x+3y)^2}.
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{array}{lll}
 f(0,0) = 0, & f_x(0,0) = -1, & f_y(0,0) = 3, \\
 f_{xx}(0,0) = -1, & f_{xy}(0,0) = 5, & f_{yy}(0,0) = -9.
 \end{array}$$

それゆえに,

$$\begin{aligned} & 0 + \{-1x + 3y\} + \frac{1}{2} \{-1x^2 + 2 \times 5xy - 9y^2\} \\ &= -x + 3y - \frac{1}{2}x^2 + 5xy - \frac{9}{2}y^2. \end{aligned}$$

微分の計算には本当に気をつけよう.