

# 微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 5)

## 合成関数の微分法

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

2 変数関数の微分の理論を構築するのに有効な合成関数の微分法を考える.

## 1 変数関数の合成関数の微分法

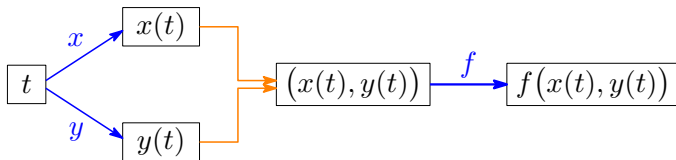
$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) g'(x).$$

$u = g(x)$ ,  $y = f(u)$  と見ると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

## 2 変数関数の合成関数

2 変数関数  $f(x, y)$  があつたとき,  $x$  と  $y$  を決める 1 変数関数  $x(t)$ ,  $y(t)$  があれば,  $t$  を独立変数とする新しい 1 変数関数  $z(t) = f(x(t), y(t))$  が構成できる.



$t$  のところを  $(u, v)$  と 2 つの数の組にすれば, 2 変数関数  $x(u, v)$  と  $y(u, v)$  による合成関数  $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  が構成できる.

ここで考えたいのは,  $z(t) = f(x(t), y(t))$  の導関数を計算する方法である.

## 合成関数の微分法 (連鎖律)

$f(x, y)$  が全微分可能,  $x(t), y(t)$  が微分可能ならば

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

$z = f(x(t), y(t))$  とすれば,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

また, 全微分を  $dt$  で割れば,

$$dz = f_x dx + f_y dy \Rightarrow \frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}.$$

全微分可能であることの定義を思い出そう.

$f(x, y)$  が  $(a, b)$  で **全微分可能** とは

♡ 
$$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + g(x, y),$$

★ 
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

となる  $\alpha, \beta, g(x, y)$  があることである.

ここで,  $\alpha = f_x(a, b), \beta = f_y(a, b)$  であった.

$z(t) = f(x(t), y(t))$  とおく.

$x(c) = a, y(c) = b$  とし,  $x(t), y(t)$  は  $t = c$  のとき微分可能であるとする.

$f(x, y)$  は  $(a, b)$  で全微分可能だから,

♡ 
$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + g(x, y),$$

★ 
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

となる  $g(x, y)$  がある.

$x = x(t), a = x(c), y = y(t), b = y(c)$  とすれば, ♡ より,

$$\begin{aligned} & f(x(t), y(t)) - f(x(c), y(c)) \\ &= f_x(a, b)(x(t) - x(c)) + f_y(a, b)(y(t) - y(c)) + g(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{z(t) - z(c)}{t - c} = f_x(a, b) \frac{x(t) - x(c)}{t - c} + f_y(a, b) \frac{y(t) - y(c)}{t - c} + \frac{g(x(t), y(t))}{t - c}.$$

ここで, 仮定より

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{x(t) - x(c)}{t - c} = x'(c), \quad \lim_{t \rightarrow c} \frac{y(t) - y(c)}{t - c} = y'(c).$$

問題は,  $\lim_{t \rightarrow c} \frac{g(x(t), y(t))}{t - c}$  である.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow c \pm 0} \frac{g(x(t), y(t))}{t - c} &= \lim_{t \rightarrow c \pm 0} \frac{g(x(t), y(t))}{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}} \\ &\quad \times \lim_{t \rightarrow c \pm 0} \frac{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}}{t - c}. \end{aligned}$$

$t \rightarrow c$  のとき  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x(c), y(c)) = (a, b)$  だから, ★ より

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{g(x(t), y(t))}{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}} = 0.$$

一方,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow c+0} \frac{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}}{t - c} \\ &= \lim_{t \rightarrow c+0} \frac{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}}{\sqrt{(t - c)^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow c+0} \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(c)}{t - c}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(c)}{t - c}\right)^2} = \sqrt{(x'(c))^2 + (y'(c))^2}. \end{aligned}$$

したがって,  $\lim_{t \rightarrow c+0} \frac{g(x(t), y(t))}{t - c} = 0 \times \sqrt{(x'(c))^2 + (y'(c))^2} = 0.$

同様にして,

$$\begin{aligned}& \lim_{t \rightarrow c-0} \frac{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}}{t - c} \\&= \lim_{t \rightarrow c-0} - \frac{\sqrt{(x(t) - x(c))^2 + (y(t) - y(c))^2}}{\sqrt{(t - c)^2}} \\&= \lim_{t \rightarrow c-0} - \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(c)}{t - c}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(c)}{t - c}\right)^2} = -\sqrt{(x'(c))^2 + (y'(c))^2}.\end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{t \rightarrow c-0} \frac{g(x(t), y(t))}{t - c} = 0 \times -\sqrt{(x'(c))^2 + (y'(c))^2} = 0.$$

以上から,  $\lim_{t \rightarrow c} \frac{g(x(t), y(t))}{t - c} = 0$  なので,

$$\begin{aligned} z'(c) &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{z(t) - z(c)}{t - c} \\ &= \lim_{t \rightarrow c} f_x(a, b) \frac{x(t) - x(c)}{t - c} + \lim_{t \rightarrow c} f_y(a, b) \frac{y(t) - y(c)}{t - c} + \lim_{t \rightarrow c} \frac{g(x(t), y(t))}{t - c} \\ &= f_x(a, b) x'(c) + f_y(a, b) y'(c). \end{aligned}$$

これは

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

を意味する.

### 例 5.1.

$f(x, y) = xy$  は全微分可能であって,  $f_x = y$ ,  $f_y = x$  なので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) &= f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= y(t) x'(t) + x(t) y'(t).\end{aligned}$$

これは結局積の微分法を表しているに過ぎない.

$$\frac{d}{dt}(x(t) y(t)) = x'(t) y(t) + x(t) y'(t).$$

偏微分の計算は, 1 変数関数の微分と変わらなかったわけなので, 次のようになることはすぐにわかる.

$f(x, y)$  が全微分可能,  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  が偏微分可能ならば

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u, v), y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x(u, v), y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

## 例 5.2.

$z = x^y$ ,  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = 4uv$  について,  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$  を求める.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \log x.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 2v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 4v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 4u.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (y x^{y-1}) (2u) + (x^y \log x) (4v) \\ &= 2 x^{y-1} (u + 2 v x \log x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (y x^{y-1}) (2v) + (x^y \log x) (4u) \\ &= 2 x^{y-1} (v + 2 u x \log x). \end{aligned}$$

さすがに  $z = (u^2 + v^2)^{4uv}$  と代入してから計算するのは大変である.

最後は無理して  $u, v$  だけの式にしようとしなくてよい.

因数分解は今回は行ったが, 別に義務ではないので,  
難しそうなら, やらなくて構わない.

合成関数の微分法は大事な計算なので, しっかり計算できるように  
たくさん練習しよう.

### 例 5.3.

$z = \log(x^3 + y^3)$ ,  $x = e^{2u} \cos 5v$ ,  $y = e^{2u} \sin 5v$  について,  
 $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$  を求める.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2e^{2u} \cos 5v,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -5e^{2u} \sin 5v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2e^{2u} \sin 5v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 5e^{2u} \cos 5v.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\&= \frac{3x^2}{x^3 + y^3} (2e^{2u} \cos 5v) + \frac{3y^2}{x^3 + y^3} (2e^{2u} \sin 5v) \\&= \frac{6e^{2u} (x^2 \cos 5v + y^2 \sin 5v)}{x^3 + y^3}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\&= \frac{3x^2}{x^3 + y^3} (-5e^{2u} \sin 5v) + \frac{3y^2}{x^3 + y^3} (5e^{2u} \cos 5v) \\&= \frac{10e^{2u} (-x^2 \sin 5v + y^2 \cos 5v)}{x^3 + y^3}.\end{aligned}$$

### 例 5.4.

$f(x, y)$  が  $C^2$  級の時,  $g(u, v) = f(2u - 3v, 5u + 4v)$  の 2 次偏導関数を求めてみよう.  $x(u, v) = 2u - 3v$ ,  $y(u, v) = 5u + 4v$  とみる.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -3, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 5, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 4.$$

合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= 2 f_x(2u - 3v, 5u + 4v) + 5 f_y(2u - 3v, 5u + 4v), \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= -3 f_x(2u - 3v, 5u + 4v) + 4 f_y(2u - 3v, 5u + 4v). \end{aligned}$$

これを  $u$  もしくは  $v$  でもう 1 回偏微分すれば, 2 次偏導関数が求められる.

したがって、変数  $(2u - 3v, 5u + 4v)$  を省略して書くと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 2 (f_x(2u - 3v, 5u + 4v))_u + 5 (f_y(2u - 3v, 5u + 4v))_u \\&= 2 \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + 5 \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \\&= 2 (2 f_{xx} + 5 f_{xy}) + 5 (2 f_{yx} + 5 f_{yy}) = 4 f_{xx} + 20 f_{xy} + 25 f_{yy},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} &= 2 (f_x(2u - 3v, 5u + 4v))_v + 5 (f_y(2u - 3v, 5u + 4v))_v \\&= 2 \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) + 5 \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\&= 2 (-3 f_{xx} + 4 f_{xy}) + 5 (-3 f_{yx} + 4 f_{yy}) \\&= -6 f_{xx} - 7 f_{xy} + 20 f_{yy}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= -3 (f_x(2u - 3v, 5u + 4v))_u + 4 (f_y(2u - 3v, 5u + 4v))_u \\&= -3 \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + 4 \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \\&= -3 (2 f_{xx} + 5 f_{xy}) + 4 (2 f_{yx} + 5 f_{yy}) \\&= -6 f_{xx} - 7 f_{xy} + 20 f_{yy}, \quad g_v, g_{uv} \text{が連続だから } g_{uv} \text{と同じ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= -3 (f_x(2u - 3v, 5u + 4v))_v + 4 (f_y(2u - 3v, 5u + 4v))_v \\&= -3 \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) + 4 \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\&= -3 (-3 f_{xx} + 4 f_{xy}) + 4 (-3 f_{yx} + 4 f_{yy}) \\&= 9 f_{xx} - 24 f_{xy} + 16 f_{yy}.\end{aligned}$$

次の問題にチャレンジしてみよう. 結果も大事だが, 計算ができれば合成関数の微分法をしっかりマスターできたことになる.

### 例 5.5.

$f(x, y)$  は  $C^2$  級とする.  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  について, 次を計算しなさい.

$$(1) \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$(2) \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$(3) \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

$$(4) \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

$$(5) \left( \frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2$$

$$(6) \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  に対し,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

合成関数の微分法より,

$$(1) \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta,$$

$$(2) \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = f_x (-r \sin \theta) + f_y (r \cos \theta),$$

$$\begin{aligned}(3) \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}(f_x) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r}(f_y) \sin \theta \\&= \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \sin \theta \\&= (f_{xx} \cos \theta + f_{xy} \sin \theta) \cos \theta + (f_{yx} \cos \theta + f_{yy} \sin \theta) \sin \theta \\&= f_{xx} \cos^2 \theta + 2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

合成関数の微分法だけでなく、積の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}(4) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(f_x)(-r \sin \theta) + (f_x) \frac{\partial}{\partial \theta}(-r \sin \theta) \\&\quad + \frac{\partial}{\partial \theta}(f_y)(r \cos \theta) + (f_y) \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) \\&= \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) (-r \sin \theta) + f_x (-r \cos \theta) \\&\quad + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) (r \cos \theta) + f_y (-r \sin \theta) \\&= (f_{xx}(-r \sin \theta) + f_{xy}(r \cos \theta))(-r \sin \theta) + f_x(-r \cos \theta) \\&\quad + (f_{yx}(-r \sin \theta) + f_{yy}(r \cos \theta))(r \cos \theta) + f_y(-r \sin \theta) \\&= r^2 (f_{xx} \sin^2 \theta - 2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \cos^2 \theta) \\&\quad - r (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta).\end{aligned}$$

(1)(2) より

$$\begin{aligned}(5) \quad & \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 \\&= (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta)^2 + \frac{1}{r^2} (-r f_x \sin \theta + r f_y \cos \theta)^2 \\&= f_x^2 \cos^2 \theta + 2 f_x f_y \sin \theta \cos \theta + f_y^2 \sin^2 \theta \\&\quad + f_x^2 \sin^2 \theta - 2 f_x f_y \sin \theta \cos \theta + f_y^2 \cos^2 \theta \\&= f_x^2 + f_y^2.\end{aligned}$$

(1)(3)(4) より

$$\begin{aligned}(6) \quad & \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\&= f_{xx} \cos^2 \theta + 2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) \\&+ \frac{1}{r^2} r^2 (f_{xx} \sin^2 \theta - 2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \cos^2 \theta) \\&- \frac{1}{r^2} r (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) \\&= f_{xx} \cos^2 \theta + 2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta \\&+ f_{xx} \sin^2 \theta - 2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \cos^2 \theta \\&= f_{xx} + f_{yy}.\end{aligned}$$

先ほどの例に関連して, 応用上, 3次元の場合に必要なことがあるので, 以下の結果を紹介しておく.

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$(r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$  が 3次元の極座標である.

$f(x, y, z)$  が  $C^2$  級の時, これを代入したものを  $g(r, \theta, \phi)$  とすれば,

$$\begin{pmatrix} g_r \\ \frac{1}{r} g_\theta \\ \frac{1}{r \sin \theta} g_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = g_{rr} + \frac{2}{r} g_r + \frac{1}{r^2} \left( g_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} g_{\phi\phi} \right).$$

## おまけ: 同次関数

$f(x, y) = 2x^3y - 5x^2y^2$  は各項が 4 次式でそろっている.  
この式の次数という概念を一般化することができる.

$(x, y) \neq (0, 0)$  に対して決まる関数  $f(x, y)$  が  $\alpha$  次の同次関数であるとは、  
すべての  $t > 0$  とすべての  $(x, y) \neq (0, 0)$  に対して

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

を満たすことをいう.

### 例 5.6.

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  は 1 次の同次関数である.

$$f(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = \sqrt{t^2(x^2 + y^2)} = t\sqrt{x^2 + y^2} = t f(x, y).$$

### 例 5.7.

$f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$  は  $-1$  次の同次関数である.

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{tx}{t^2(x^2 - y^2)} = t^{-1} \frac{x}{x^2 - y^2} = t^{-1} f(x, y).$$

0 次の同次関数を単に同次関数という. 例えば,

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x + 2y}{\sqrt{3x^2 + y^2}}.$$

次の結果が知られているので、示してみよう!

関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) \neq (0, 0)$  で  $C^1$  級るとき

(1)  $f(x, y)$  が  $\alpha$  次の同次関数であれば,

$$\diamond \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

(2)  $\diamond$  が成立していれば,  $f(x, y)$  は  $\alpha$  次の同次関数である.

(1)  $(x, y) \neq (0, 0)$  を定数扱いとする.  $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$  に注意する.  
 $z(t) = f(tx, ty)$  を微分すると, 合成関数の微分法から,

$$z'(t) = f_x(tx, ty) (tx)' + f_y(tx, ty) (ty)' = x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty).$$

$z(t) = t^\alpha f(x, y)$  を微分すると,  $f(x, y)$  は定数なので,

$$z'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

以上の2つは同じものなので,  $z'(1)$  を考えれば,

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = z'(1) = \alpha f(x, y)$$

(2)  $(x, y) \neq (0, 0)$  を定数扱いとする.  $z(t) = t^{-\alpha} f(tx, ty)$  とする. これを  $t$  で微分すると, 合成関数の微分法から,

$$\begin{aligned} z'(t) &= (t^{-\alpha})' f(tx, ty) + t^{-\alpha} \frac{d}{dt} f(tx, ty) \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx, ty) + t^{-\alpha} [f_x(tx, ty) (tx)' + f_y(tx, ty) (ty)'] \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx, ty) + t^{-\alpha} [x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty)] \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx, ty) + t^{-\alpha-1} [(tx) f_x(tx, ty) + (ty) f_y(tx, ty)] \end{aligned}$$

ここで,  $\diamond$  を仮定していたので,

$$(tx) \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + (ty) \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha f(tx, ty).$$

これより,

$$z'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx, ty) + t^{-\alpha-1} [\alpha f(tx, ty)] = 0.$$

さて, 平均値の定理から,  $z(t) - z(1) = z'(c)(t - 1)$  となる  $c$  が (1 と  $t$  の間に) ある.  $z'(c) = 0$  なので,  $z(t) - z(1) = 0$ .

ゆえに,  $t^{-\alpha} f(tx, ty) = f(x, y)$ . 書き換えて  $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ .

$(x, y) \neq (0, 0)$  は何でもよかったので, これは  $f(x, y)$  が  $\alpha$  次の同次関数であることを表している.

一方, 同次関数については, 次も成立する.

関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) \neq (0, 0)$  で偏微分可能とする.

このとき,  $f(x, y)$  が  $\alpha$  次の同次関数であれば,  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  は  $(\alpha - 1)$  次の同次関数である.

$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$  の両辺を  $x$  で偏微分すれば, 左辺の偏微分は

$$f_x(tx, ty) (tx)_x = t f_x(tx, ty).$$

右辺の偏微分は  $t^\alpha f_x(x, y)$  なので,

$$t f_x(tx, ty) = t^\alpha f_x(x, y). \quad \therefore f_x(tx, ty) = t^{\alpha-1} f_x(x, y).$$

これは,  $f_x(x, y)$  が  $(\alpha - 1)$  次の同次関数であることを示している.  
 $f_y(x, y)$  も同様にして示せる.