微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 4)

全微分と接平面

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

偏微分が終わったところで, 改めて 2 変数関数の微分に挑戦してみる.

1 変数関数の微分について, 次が成立していた (詳細は 1 変数関数の合成関数の微分法のところを復習してほしい).

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能であることの言いかえ

次を満たす A と $f_1(x)$ がある.

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + f_1(x), \quad \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{x-a} = 0.$$

言うまでもなく, $f'(a) = A$ である.

図形的には, 微分係数は接線の方程式の傾きであり,
接線 $y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ は $y = f(x)$ のいい近似となっている.

接線を 2 変数関数に対応させたものが接平面になるだろう.
接平面は $z = f(x, y)$ と非常に近い平面であることに注意する.

全微分可能性の定義

$x-a$ は (符号を除けば)x と a との距離 (近さ) であることに注意する.

$f(x,y)$ が (a,b) で**全微分可能**とは

♡ $$f(x,y)=f(a,b)+\alpha\,(x-a)+\beta\,(y-b)+g(x,y),$$

★ $$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

となる α, β, $g(x,y)$ があることである.

ここで, $z=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)$ が**接平面**である.

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であれば, 次が成立する.

(1) $f(x,y)$ が (a,b) で連続.

(2) $\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

(1) 連続性

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとする．このとき，★ から

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$= 0 \times 0 = 0.$$

したがって，♡ より

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left\{ f(a,b) + \alpha\,(x-a) + \beta\,(y-b) + g(x,y) \right\}$$
$$= f(a,b) + \alpha \times 0 + \beta \times 0 + 0 = f(a,b).$$

ゆえに，$f(x,y)$ は (a,b) で連続である．

(2) $\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

♡ より

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{\alpha\,(x - a) + \beta\,(b - b) + g(x, b)}{x - a} = \alpha + \frac{g(x, b)}{x - a}.$$

★ において $(x, y) \to (a, b)$ の近づき方を
$y = b$, $x > a$ のまま $x \to a$ とすると,

$$0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=b,x>a}} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = \lim_{x\to a+0} \frac{g(x, b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (b - b)^2}}$$
$$= \lim_{x\to a+0} \frac{g(x, b)}{x - a}.$$

$y = b,\ x < a$ のまま $x \to a$ とすると,

$$0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ y=b, x<a}} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \lim_{x\to a-0} \frac{g(x,b)}{\sqrt{(x-a)^2+(b-b)^2}}$$

$$= \lim_{x\to a-0} \frac{g(x,b)}{-(x-a)} = \lim_{x\to a-0} -\frac{g(x,b)}{x-a}.$$

したがって,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x,b)}{x-a} = 0.$$

ゆえに,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\alpha + \frac{g(x,b)}{x-a}\right) = \alpha + 0 = \alpha.$$

$\beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ も同様にして示せる.

例 4.1. $f(x,y)=xy$ は全微分可能.

まず, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ である.

ここで,

$$xy = ab + b(x-a) + a(y-b) + (x-a)(y-b)$$

と変形できるので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{(x-a)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ がわかればよい.

$X=x-a$, $Y=y-b$ とすれば, これは $\displaystyle\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X\,Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ であり, 0 であった.

以上から, ♡ と ★ が成立するので, 全微分可能である.

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ について

まず, 相加相乗平均の関係から,

$$|x|\,|y| \leqq \frac{|x|^2+|y|^2}{2}. \quad \therefore\ |x\,y| \leqq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

したがって,

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \leqq x\,y \leqq \frac{x^2+y^2}{2}. \quad -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leqq \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

ここで, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$ だから,

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

全微分可能であることを示すのは, 正直面倒であるので,
もう少し楽な方法を知りたい.

$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が連続のとき, $f(x,y)$ は全微分可能である.

以降のページで上記の証明を書いているが,
証明は読み飛ばしたい人は読み飛ばしてよい.

h, k が十分小さいときに, 次を考える.

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ &=[f(a+h,b+k)-f(a,b+k)]+[f(a,b+k)-f(a,b)] \end{aligned}$$

前半は x についての, 後半は y についての関数と見る.
$f(x,b+k)$ および $f(a,y)$ は 1 変数関数として微分可能である.
ラグランジュの平均値の定理を用いると,

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k)-f(a,b+k)=f_x(a+\theta_1 h,b+k)\,h, \quad 0<\theta_1<1, \\ &f(a,b+k)-f(a,b)=f_y(a,b+\theta_2 k)\,k \quad 0<\theta_2<1. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ &=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k+h[f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a,b)] \\ &\qquad +k[f_y(a,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)]. \end{aligned}$$

f_x, f_y は (a,b) で連続だから,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_x(a+\theta_1 h, b+k) = f_x(a,b),$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_y(a, b+\theta_2 k) = f_y(a,b).$$

特に,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} |f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)| = 0,$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} |f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)| = 0.$$

また, $-1 \leqq \dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq 1$, $-1 \leqq \dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq 1$ である.

したがって,

$$
\begin{aligned}
&-|f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)| \\
&\leqq \frac{h\,[f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq |f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)|, \\
&-|f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)| \\
&\leqq \frac{k\,[f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq |f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)|.
\end{aligned}
$$

2 式の左辺も右辺も $(h,k) \to (0,0)$ のとき 0 に収束する.
はさみうちの原理より

$$
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h[f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,
$$

$$
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k[f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.
$$

ゆえに

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k+g(h,k),$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

ただし,

$$g(h,k)=h[f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a,b)]+k[f_y(a,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)].$$

これは $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であることを意味する.
また, $\alpha=f_x(a,b)$, $\beta=f_y(a,b)$ ということもはっきりわかる.

以上の証明は忘れてしまっても構わないが, 結果だけは大切に使おう.

では, 全微分は?

$z = f(x, y)$ の全微分とは

$$dz = f(a + dx, b + dy) - f(a, b) = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy,$$
$$\Rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

の形式のことである. $z = f(x, y)$ の微小変化量を表している.

dx や dy はそれぞれ x, y の微小変化量であり, その係数が $f_x(a, b)$ や $f_y(a, b)$ だから, それらを偏微分係数というのであった.

例 4.2. $z = \sqrt{1+4x^3y^2}$ の全微分.

$z = (1+4x^3y^2)^{\frac{1}{2}}$ だから,

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{2}\,(1+4x^3y^2)^{\frac{1}{2}-1}\,(1+4x^3y^2)_x = \frac{1}{2}\,(1+4x^3y^2)^{-\frac{1}{2}}\,12x^2y^2 \\ &= \frac{6x^2y^2}{\sqrt{1+4x^3y^2}}. \\ z_y &= \frac{1}{2}\,(1+4x^3y^2)^{\frac{1}{2}-1}\,(1+4x^3y^2)_y = \frac{1}{2}\,(1+4x^3y^2)^{-\frac{1}{2}}\,8x^3y \\ &= \frac{4x^3y}{\sqrt{1+4x^3y^2}}. \end{aligned}$$

これらは連続関数だから, 全微分可能である. したがって, 求める全微分は

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy = \frac{6x^2y^2}{\sqrt{1+4x^3y^2}}\,dx + \frac{4x^3y}{\sqrt{1+4x^3y^2}}\,dy.$$

接平面

全微分可能というのは, 図形的に言えば**接平面**が存在することである.

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能のとき,
曲面 $z=f(x,y)$ の $(a,b,f(a,b))$ における**接平面の方程式**は

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b).$$

展開して整理したときに, $z = Ax + By + C$ のような形になることに注意してほしい.

例 4.3. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ の $(1,-2,2)$ における接平面の方程式.

まず, $x=1$, $y=-2$ のとき,

$$z=\sqrt{9-1^2-(-2)^2}=\sqrt{9-1-4}=\sqrt{4}=2$$

なので, $(1,-2,2)$ は曲面上の点である. $z=(9-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ だから,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

$z_x(1,-2)=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$, $z_y(1,-2)=\frac{-(-1)}{2}=1$ だから,

$$z=2-\frac{1}{2}(x-1)+1(y+2). \quad \therefore\ z=-\frac{1}{2}x+y+\frac{9}{2}.$$

高校のときにやっていると思うが, 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の (a,b) における円の接線の方程式は

$$a\,x+b\,y=r^2.$$

実は, 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上の点 (a,b,c) における球面の接平面の方程式は

$$a\,x+b\,y+c\,z=R^2.$$

先ほど求めた接平面の方程式は $z=-\dfrac{1}{2}\,x+y+\dfrac{9}{2}$ だが, 変形すると,

$$x-2\,y+2\,z=9.$$

考えていた曲面は $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ だが, 変形すると,

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

以上にあげた球面の接平面の一般論と比較してほしい.

接平面は, 全微分可能であるときにのみ意味があるものである.

偏微分可能なだけでは, 接平面ができるわけではない.

例えば,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続ではないが, 偏微分は可能であり,

$$f_x(0,0)=0,\quad f_y(0,0)=0$$

であった.

例 4.4.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

この関数に対して, $z = f(x,y)$ の $(0,0,0)$ における接平面の有無を考える.

まず, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である.

また, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で偏微分可能である.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

接平面はありそう…

ところが，全微分は可能でない．まず，

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)\,(x-0)+f_y(0,0)\,(y-0)+g(x,y)$$

となる $g(x,y)$ は $g(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ である．ところが，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

は極限値が存在しない．この極限値が 0 ではないから，全微分可能ではないのである．

接平面の応用: 陰関数表示の曲線と接線

$z = f(x, y)$ は曲面だが, $z = k$ で断面を考えると, 曲線が現れる.
$z = A\,x + B\,y + C$ は平面だが, $z = k$ で断面を考えると, 直線が現れる.

そこで, 曲面 $z = f(x, y)$ と, その接平面

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)$$

とを考えて, 接点 $(a, b, f(a, b))$ を含む平面 $z = f(a, b)$ で断面を考えると, 曲線とそれに接する直線が現れる.

その直線は $z = f(a, b)$ と $z = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)$ とを連立させて出てくる

$$f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b) = 0$$

である.

一般に, 次のことが知られている.

$f(x,y)$ が C^1 級であり, $(f_x(a,b), f_y(a,b)) \neq (0,0)$ とする.
曲線 $f(x,y) = C = f(a,b)$ の (a,b) における接線の方程式は

$$f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b) = 0.$$

$(f_x(a,b), f_y(a,b)) \neq (0,0)$ となる曲線 $f(x,y) = C$ 上の点を正則点 (または通常点) という.

これを 3 変数に一般化すれば, 次のことも同様にわかる.

$f(x,y,z)$ が C^1 級であり,
$(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)) \neq (0,0,0)$ とする.
曲面 $f(x,y,z) = C = f(a,b,c)$ の (a,b,c) における接平面の方程式は

$$f_x(a,b,c)\,(x-a) + f_y(a,b,c)\,(y-b) + f_z(a,b,c)\,(z-c) = 0.$$

球面の接平面の方程式の結果の一般化ができた.