微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 3)
高次偏導関数

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

偏導関数を更に偏微分

偏微分を 1 回やったのなら, 2 回やってもいいはずである.

$f_x(x, y)$ を x で偏微分した

$$\{f_x(x, y)\}_x = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

$f_x(x, y)$ を y で偏微分した

$$\{f_x(x, y)\}_y = f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

$f_y(x,y)$ を x で偏微分した

$$\{f_y(x,y)\}_x = f_{yx}(x,y), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

$f_y(x,y)$ を y で偏微分した

$$\{f_y(x,y)\}_y = f_{yy}(x,y), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

これら f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} をまとめて 2 階偏導関数や 2 次偏導関数という.

2 次偏導関数については, 記法に注意してほしい.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

x と y の位置が逆転しているので注意.

2 次偏導関数を求めるには，まず 1 回偏微分した偏導関数を求めておかないといけないことは明らかである．

例 3.1. $f(x,y) = x^3 - 6x^2y + 3y^3$ の 2 次偏導関数．

$$f_x = 3x^2 - 12xy + 0 = 3x^2 - 12xy.$$
$$f_y = 0 - 6x^2 + 9y^2 = -6x^2 + 9y^2.$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = (3x^2 - 12xy)_x = 6x - 12y.$$
$$f_{xy} = (f_x)_y = (3x^2 - 12xy)_y = 0 - 12x = -12x.$$
$$f_{yx} = (f_y)_x = (-6x^2 + 9y^2)_x = -12x + 0 = -12x.$$
$$f_{yy} = (f_y)_y = (-6x^2 + 9y^2)_y = 0 + 18y = 18y.$$

例 3.2. $f(x,y)=\sin(3x-4y)$ の 2 次偏導関数.

$$f_x = \cos(3x-4y)\,(3x-4y)_x = 3\,\cos(3x-4y).$$
$$f_y = \cos(3x-4y)\,(3x-4y)_y = -4\,\cos(3x-4y).$$

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= (f_x)_x = \{3\,\cos(3x-4y)\}_x = 3\times-\sin(3x-4y)\,(3x-4y)_x \\
&= -9\,\sin(3x-4y). \\
f_{xy} &= (f_x)_y = \{3\,\cos(3x-4y)\}_y = 3\times-\sin(3x-4y)\,(3x-4y)_y \\
&= 12\,\sin(3x-4y). \\
f_{yx} &= (f_y)_x = \{-4\,\cos(3x-4y)\}_x = -4\times-\sin(3x-4y)\,(3x-4y)_x \\
&= 12\,\sin(3x-4y). \\
f_{yy} &= (f_y)_y = \{-4\,\cos(3x-4y)\}_y = -4\times-\sin(3x-4y)\,(3x-4y)_y \\
&= -16\,\sin(3x-4y).
\end{aligned}$$

もしかして, 必ず $f_{xy}=f_{yx}$ なの?? NO!!

$f_{xy} = f_{yx}$ はいつも成立するわけではない.

例 3.3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(ax^2+by^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は $a \neq b$ のとき $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ である.

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h\,y\,(a\,h^2 + b\,y^2)}{h^2+y^2} - 0\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{y\,(a\,h^2 + b\,y^2)}{h^2+y^2} = \frac{y\,(a\times 0 + b\,y^2)}{0+y^2} = \frac{b\,y^3}{y^2} = b\,y.$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$
f_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x\,h\,(a\,x^2 + b\,h^2)}{x^2 + h^2} - 0 \right)
$$

$$
= \lim_{h\to 0} \frac{x\,(a\,x^2 + b\,h^2)}{x^2 + h^2} = \frac{x\,(a\,x^2 + b \times 0)}{x^2 + 0} = \frac{a\,x^3}{x^2} = a\,x.
$$

$$
f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.
$$

以上から, $f_x(0,y) = b\,y$, $f_y(x,0) = a\,x$ **だから**,

$$
f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b\,h - b \times 0}{h} = \lim_{h\to 0} b = b.
$$

$$
f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a\,h - a \times 0}{h} = \lim_{h\to 0} a = a.
$$

$a \neq b$ **なので**, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

では, どのような場合に $f_{xy} = f_{yx}$ となるのだろうか.

f_x, f_y, f_{xy} が連続関数であれば,
f_{yx} は計算しなくても存在することが分かり, $f_{yx} = f_{xy}$ である.

以降のページで上記の証明を書いているが,
証明は読み飛ばしたい人は読み飛ばしてよい.

h, k が十分小さいとき,

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\ &= [f(a+h,b+k) - f(a+h,b)] - [f(a,b+k) - f(a,b)]\end{aligned}$$

を考える. x を変数とする関数 $F(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$ を定めると $\Delta(h,k) = F(a+h) - F(a)$ であり, (1 変数関数として) 微分可能である. これに対し平均値の定理を用いることができる.

$$F(a+h) - F(a) = F'(a+\theta_1 h)\, h, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

ここで, $F'(a+\theta_1 h) = f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)$ である.
y を変数とする関数 $G(y) = f_x(a+\theta_1 h, y)$ は
(1 変数関数として) 微分可能であり, 平均値の定理を用いると,

$$G(b+k) - G(b) = G'(b+\theta_2 k)\, k, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

ここで, $G'(b+\theta_2 k) = f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$ である.

以上から, 次を満たす θ_1, θ_2 があることがわかった.

$$\Delta(h,k) = f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)\, hk, \quad 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1$$

$(h,k)\to(0,0)$ とすれば, $(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)\to(a,b)$ で, f_{xy} の連続性から

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{xy}(a,b).$$

一方, $(h,k)\to(0,0)$ の近づけ方を先に $k\to 0$ としてから,
そのあと $h\to 0$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0} \frac{\Delta(h,k)}{hk} &= \lim_{k\to 0} \frac{[f(a+h,b+k)-f(a+h,b)]-[f(a,b+k)-f(a,b)]}{hk} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}}{h} \\
&= \frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{hk}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(a+h,b)-f_y(a,b)}{h} = f_{yx}(a,b).$$

最後は定義を書き下しただけだが，この極限値は確定する．(どんな $(h,k)\to(0,0)$ の近づけ方をしても同じ値に近づくことが分かっていた)．したがって，$f_{yx}(a,b)$ は存在するし，極限値は同じになるはずだから $f_{yx}(a,b)=f_{xy}(a,b)$ となる．

$f_{yx}(x,y)=f_{xy}(x,y)$ を示すのに必要な連続性は
$f_{xy}(x,y)$ の 1 点での連続性だけで充分だった．
ただし，$f_y(x,y)$ があるということは重要な情報である．

例 3.4. $f(x,y)=\log(xy+2x+3y)$ の 2 次偏導関数.

$$f_x = \frac{(xy+2x+3y)_x}{xy+2x+3y} = \frac{y+2}{xy+2x+3y}.$$

$$f_y = \frac{(xy+2x+3y)_y}{xy+2x+3y} = \frac{x+3}{xy+2x+3y}.$$

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{(y+2)_x\,(xy+2x+3y)-(y+2)\,(xy+2x+3y)_x}{(xy+2x+3y)^2} \\
&= \frac{0-(y+2)\,(y+2)}{(xy+2x+3y)^2} = \frac{-(y+2)^2}{(xy+2x+3y)^2}. \\
f_{xy} &= \frac{(y+2)_y\,(xy+2x+3y)-(y+2)\,(xy+2x+3y)_y}{(xy+2x+3y)^2} \\
&= \frac{1\,(xy+2x+3y)-(y+2)\,(x+3)}{(xy+2x+3y)^2} \\
&= \frac{xy+2x+3y-xy-3y-2x-6}{(xy+2x+3y)^2} = \frac{-6}{(xy+2x+3y)^2}.
\end{aligned}$$

$$f_{yx} = f_{xy} = \frac{-6}{(xy + 2x + 3y)^2}. \quad \because\ f_x,\ f_y,\ f_{xy} \text{ が連続.}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \frac{(x+3)_y\,(xy+2x+3y) - (x+3)\,(xy+2x+3y)_y}{(xy+2x+3y)^2} \\ &= \frac{0 - (x+3)\,(x+3)}{(xy+2x+3y)^2} = \frac{-(x+3)^2}{(xy+2x+3y)^2}. \end{aligned}$$

連続かどうかは見た目で判断して問題ない
(多項式 分の 多項式 なら, 分母が 0 でない限りは連続関数).

例 3.5. $f(x,y) = e^{x^2y^3}$ の 2 次偏導関数.

$$f_x = e^{x^2y^3}\,(x^2y^3)_x = 2xy^3\,e^{x^2y^3}.$$

$$f_u = e^{x^2y^3}\,(x^2y^3)_u = 3x^2y^2\,e^{x^2y^3}.$$

$$f_{xx} = (2xy^3)_x\,e^{x^2y^3} + 2xy^3\,(e^{x^2y^3})_x = 2y^3\,e^{x^2y^3} + 2xy^3(2xy^3\,e^{x^2y^3})$$

$$= (2y^3 + 4x^2y^6)\,e^{x^2y^3}.$$ $2\,x\,y^3\,e^{x^2\,y^3}$ と積の微分法に注意!

$$f_{xy} = (2xy^3)_y\,e^{x^2y^3} + 2xy^3\,(e^{x^2y^3})_y = 6xy^2\,e^{x^2y^3} + 2xy^3(3x^2y^2\,e^{x^2y^3})$$

$$= (6xy^2 + 6x^3y^5)\,e^{x^2y^3}.$$ f_{xx} と同様に注意!

$$f_{yx} = (6xy^2 + 6x^3y^5)\,e^{x^2y^3}.$$ $\because$ f_x, f_y, f_{xy} が連続.

$$f_{yy} = (3x^2y^2)_y\,e^{x^2y^3} + 3x^2y^2\,(e^{x^2y^3})_y = 6x^2y\,e^{x^2y^3} + 3x^2y^2(3x^2y^2\,e^{x^2y^3})$$

$$= (6x^2y + 9x^4y^4)\,e^{x^2y^3}.$$ f_{xx}, f_{xy} と同様に注意!

偏微分は 3 回以上も考えることは可能だが,
ここで詳しい話をやめておこう.

f_{yyx}

偏微分 1 回目: y, 偏微分 2 回目: y, 偏微分 3 回目: x.

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$

偏微分 1 回目: x, 偏微分 2 回目: x, 偏微分 3 回目: y.