微分積分 3(偏微分) 自習スライド (Part 2)

偏微分の計算

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 02 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

2 変数関数の微分

本当は 2 変数関数の微分をやりたいが, 1 変数関数のをまねると

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)}{(x,y)-(a,b)}$$

となってしまい, 訳が分からなくなってしまう.
仕方ないので, x だけ, y だけで微分するものを考える.

偏微分

y を b としたまま, $x \to a$ とした

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

を $f(x,y)$ の x **偏微分係数**といい, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ や $f_x(a,b)$ などと表す.

x を a としたまま, $y \to b$ とした

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

を $f(x,y)$ の y **偏微分係数**といい, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ や $f_y(a,b)$ などと表す.

$f(x,y)$ を x **について微分したもの**が x **偏微分係数**である.

x 偏微分係数および y 偏微分係数が存在するとき, 偏微分可能という.

偏微分係数は (a,b) ごとに値が決まるので, 新しい関数

$$(a,b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b), \quad (a,b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b)$$

が作れる. これらをそれぞれ x **偏導関数**, y **偏導関数** という.
2 つあわせて単に**偏導関数**という.

$$x\ \textbf{偏導関数}: \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ f_x(x,y),\ \partial_x f(x,y).$$

$$y\ \textbf{偏導関数}: \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ f_y(x,y),\ \partial_y f(x,y).$$

偏微分係数または偏導関数を求めることを偏微分するという.

偏微分というけど, 計算の理屈は 1 変数関数の微分法と同じ. 違うのは

- 記号の書き方:
  d ではなく ∂.
  $(\cdots)'$ ではなく $(\cdots)_x$ または $(\cdots)_y$.
- 2 種類 (以上) の文字が出るので計算する際に注意が必要:
  y を x で偏微分したら (y に x は入っていないので)0.
  x を y で偏微分したら (x に y は入っていないので)0.

∂ は ディー と読んでもいいし, デル や ラウンドディーなどと読んでもよい.

書き順は d と同じく中から書き始め, 1 画で書いてしまえばよいが, あまり書き順にこだわらなくてもよい (丁寧に書けばいいだけの話).

例 2.1. $f(x,y)=3xy+2x+y$ **の偏導関数.**

$f(x,y)=(3y+2)x+y$ と見れるから,

$$f_x=(3y+2)\,(x)_x+(y)_x=(3y+2)\times 1+0=3y+2.$$

$f(x,y)=(3x+1)y+2x$ と見れるから,

$$f_y=(3x+1)\,(y)_y+(2x)_y=(3x+1)\times 1+0=3x+1.$$

ここでは丁寧にやったが, 多項式なのでさっとできるようにしてほしい.

ただし, y の式を x で微分したら 0 に, x の式を y で微分したら 0 になることには注意しよう.

例 2.2. $f(x,y) = e^{2x}\sin 3y$ の偏導関数.

積の微分法より,

$$f_x = (e^{2x})_x \sin 3y + (e^{2x}) \underbrace{(\sin 3y)_x}_{x\text{ を含まない}}$$

$$= 2e^{2x}\sin 3y + e^{2x}\,0 = 2e^{2x}\sin 3y.$$

$$f_y = \underbrace{(e^{2x})_y}_{y\text{ を含まない}} \sin 3y + (e^{2x})(\sin 3y)_y$$

$$= 0\sin 3y + e^{2x}\,3\cos 3y = 3e^{2x}\cos 3y.$$

積の微分法を用いなくても, $f(x,y) =$ y の式 (定数扱い) e^{2x} や $f(x,y) =$ x の式 (定数扱い) $\sin 3y$ と見れることから,

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}, \quad (\sin 3y)' = 3\cos 3y \quad (1\text{ 変数関数とみた微分の意味で})$$

に注意して計算を進めてもよい.

1 変数関数の微分には合成関数の微分法があったから，
それを使ってみよう．

例 2.3. $f(x,y) = e^{x^3y^2}$ の偏導関数.

$(e^u)' = e^u \times u'$ で計算できたことを思い出そう．

$$
\begin{aligned}
f_x &= e^{x^3y^2} \times (x^3y^2)_x = e^{x^3y^2} \times (y^2\,x^3)_x = e^{x^3y^2} \times (3y^2\,x^2) \\
&= 3x^2y^2\,e^{x^3y^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y &= e^{x^3y^2} \times (x^3y^2)_y = e^{x^3y^2} \times (x^3\,y^2)_y = e^{x^3y^2} \times (2x^3\,y) \\
&= 2x^3y\,e^{x^3y^2}.
\end{aligned}
$$

もう少し難しい例を考えてみよう.

例 2.4. $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ **の偏導関数.**

$(\tan^{-1}u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\times u'$ で計算できたことを思い出そう.

$$f_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\times\left(\frac{y}{x}\right)_x=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times-\frac{y}{x^2}=\frac{-y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$$f_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\times\left(\frac{y}{x}\right)_y=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\frac{x}{x^2}$$
$$=\frac{x}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

連続関数ではないのに，偏微分は計算できる場合もある．

例 2.5.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続ではないが，偏微分は可能である．

$$f(x,0)=\frac{x\times 0}{x^2+0^2}=\frac{0}{x^2}=0,\quad f(0,y)=\frac{0\times y}{0^2+y^2}=\frac{0}{y^2}=0$$

であるから，

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

偏微分係数は求められた．

当然だが, 連続だからといって偏微分できるわけではない.

偏微分できたとしても, 連続であるということが言えないというのは 1 変数関数とは異なる事情のように見える.

ちなみに, 先ほどの例の $f(x,y)$ について, $(x,y) \neq (0,0)$ における偏導関数を求めるのは難しくない (商の微分法を用いればよい).

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{(xy)_x\,(x^2+y^2) - (xy)\,(x^2+y^2)_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y\,(x^2+y^2) - (xy)\,(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2y + y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{(xy)_y\,(x^2+y^2) - (xy)\,(x^2+y^2)_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x\,(x^2+y^2) - (xy)\,(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

当たり前であるが,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \neq f_x(0,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) \neq f_y(0,0).$$

左辺の極限値は発散している (気になる人は試しに計算してみよう).

例 2.6. $f(x,y)=\dfrac{3x+y}{x^2+2xy+3y^2}$ の偏導関数.

商の微分法を用いる.

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{(3x+y)_x\,(x^2+2xy+3y^2)-(3x+y)\,(x^2+2xy+3y^2)_x}{(x^2+2xy+3y^2)^2}\\
&= \frac{3\,(x^2+2xy+3y^2)-(3x+y)\,(2x+2y)}{(x^2+2xy+3y^2)^2}\\
&= \frac{(3x^2+6xy+9y^2)-(6x^2+6xy+2xy+2y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)^2}\\
&= \frac{-3x^2-2xy+7y^2}{(x^2+2xy+3y^2)^2} = -\frac{3x^2+2xy-7y^2}{(x^2+2xy+3y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

同様にして,

$$
\begin{aligned}
f_y &= \frac{(3x+y)_y\,(x^2+2xy+3y^2) - (3x+y)\,(x^2+2xy+3y^2)_y}{(x^2+2xy+3y^2)^2} \\
&= \frac{1\,(x^2+2xy+3y^2) - (3x+y)\,(2x+6y)}{(x^2+2xy+3y^2)^2} \\
&= \frac{(x^2+2xy+3y^2) - (6x^2+18xy+2xy+6y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)^2} \\
&= \frac{-5x^2-18xy-3y^2}{(x^2+2xy+3y^2)^2} = -\frac{5x^2+18xy+3y^2}{(x^2+2xy+3y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

偏微分は微分の計算であるから, 微分公式をまとめておいた.

微分の基本公式

(1) $\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.

(2) $\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ (積の微分法).

(3) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$ (商の微分法).

(4) $\{f\big(g(x)\big)\}' = f'\big(g(x)\big)\,g'(x)$ (合成関数の微分法).

(5) $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ (逆関数の微分法).

公式は使ってこそ意味があるので, 積極的に使っていこう.

基本的な関数の微分公式　$e = 2.718\cdots$ はネイピア数

(1) $(x^a)' = a\,x^{a-1}$ (a は実数).

(2) $(\sin x)' = \cos x$.

(3) $(\cos x)' = -\sin x$,

(4) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(5) $(a^x)' = a^x \log a$.

(6) $(e^x)' = e^x$.

(7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$.

(8) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$.

(9) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(11) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.