

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 10)

部分積分 (定積分)

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

部分積分が必要な定積分の計算を考える。
もちろん、不定積分を求めてから計算してもよい。

一応、定積分の場合の部分積分法についてまとめておこう。

$f(x), g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で C^1 級な関数とする。

$\int$ がない項は $[\]_a^b$ を付け忘れないで!

② 微分

$$\int_a^b \boxed{f'(x)} g(x) dx = \left[\boxed{f(x)} \boxed{g(x)} \right]_a^b - \int_a^b \boxed{f(x)} \boxed{g'(x)} dx$$

① 積分

積分したものは戻さない!

部分積分をすると定積分の計算に必要な不定積分の一部が現れるが、それを先に処理 (上端・下端を代入して引き算) すると式が簡潔になることがある。

例 10.1. $\int_0^1 x e^x dx.$

まず, 不定積分を求める

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x = (x - 1) e^x.\end{aligned}$$

したがって, 求める定積分は,

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[(x - 1) e^x \right]_0^1 = 0 e^1 - (-1) e^0 = 1.$$

別解

部分積分法により,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^x dx &= \int_0^1 x (e^x)' dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx \\ &= 1 e^1 - 0 e^0 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1.\end{aligned}$$

例 10.2. $\int_1^2 \log x \, dx.$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \log x \, dx &= \int_1^2 1 \log x \, dx = \int_1^2 (x)' \log x \, dx \\&= \left[x \log x \right]_1^2 - \int_1^2 x (\log x)' \, dx \\&= 2 \log 2 - 1 \log 1 - \int_1^2 x \frac{1}{x} \, dx \\&= 2 \log 2 - \left[x \right]_1^2 = 2 \log 2 - (2 - 1) = 2 \log 2 - 1.\end{aligned}$$

もう少し例を見ておこう.

部分積分を 2 回以上行う場合でも, 1 回ずつ丁寧に行えばよい,

例 10.3. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx &= \int_0^{\pi} x^2 (-\cos x)' \, dx \\ &= \left[x^2 (-\cos x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x^2)' (-\cos x) \, dx \\ &= \pi^2 (-(-1)) - 0^2 (-1) - \int_0^{\pi} 2x (-\cos x) \, dx \\ &= \pi^2 - \int_0^{\pi} 2x (-\sin x)' \, dx \\ &= \pi^2 - \left(\left[2x (-\sin x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (2x)' (-\sin x) \, dx \right) \\ &= \pi^2 - \left(2\pi (-0) - 2 \times 0 (-0) - \int_0^{\pi} -2 \sin x \, dx \right) \\ &= \pi^2 + \left[-2(-\cos x) \right]_0^{\pi} = \pi^2 + (-2) - 2 = \pi^2 - 4. \end{aligned}$$

例 10.4. $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx.$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' \sin x \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^{2x} (\sin x)' \, dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2\pi} 0 - \frac{1}{2} e^0 0 - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' \cos x \, dx \\ &= - \left(\left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} (\cos x)' \, dx \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} e^{2\pi} (-1) - \frac{1}{4} e^0 1 - \int_0^{\pi} \frac{1}{4} e^{2x} (-\sin x) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx = \frac{e^{2\pi} + 1}{4} - \frac{1}{4} I. \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{5}{4} I = \frac{e^{2\pi} + 1}{4}. \quad \therefore I = \frac{e^{2\pi} + 1}{5}.$$

オイラーの公式を利用すると、部分積分法を用いず計算できる。

別解

オイラーの公式より、 $e^{(2+i)x} = e^{2x+i x} = e^{2x} e^{i x} = e^{2x} (\cos x + i \sin x)$.
したがって、被積分関数 $e^{2x} \sin x$ は $e^{(2+i)x}$ の虚部である。

$$\int_0^{\pi} e^{(2+i)x} dx = \left[\frac{1}{2+i} e^{(2+i)x} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2+i} e^{(2+i)\pi} - \frac{1}{2+i} e^0.$$

ここで、

$$e^{(2+i)\pi} = e^{2\pi+\pi i} = e^{2\pi} (\cos \pi + i \sin \pi) = e^{2\pi} (-1) = -e^{2\pi}.$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{(2+i)x} dx &= \frac{1}{2+i} (-e^{2\pi} - 1) = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} \times -(e^{2\pi} + 1) \\ &= -\frac{2-i}{5} (e^{2\pi} + 1) = \frac{-2+i}{5} (e^{2\pi} + 1). \end{aligned}$$

求める定積分は, この虚部であったから,

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx = \frac{e^{2\pi} + 1}{5}.$$

なお, 実部をみれば

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx = -\frac{2(e^{2\pi} + 1)}{5}.$$

三角関数の積分のところで軽く触れたが, $I_n = \int (\sin x)^n dx$ および $J_n = \int (\cos x)^n dx$ は部分積分を利用することでそれぞれ

$$I_n = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$
$$J_n = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

となった. これを定積分に活用しよう.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \text{ を考えると}$$

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

一方, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$ である. これから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx = I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx = I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} I_2 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} I_0 = \frac{5}{32} \pi.$$

より一般には次の式が得られる:

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \pi,$$
$$I_{2m+1} = \frac{(2m)(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots 3} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

ただし, 次の計算に注意せよ.

$$(2m)(2m-2)\cdots 2 = (2 \times m)(2 \times (m-1))\cdots (2 \times 1) = 2^m m!,$$
$$(2m+1)(2m-1)\cdots 3 = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)(2m-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2}$$
$$= \frac{(2m+1)!}{2^m m!}.$$

おまけ: ウォリスの公式

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ を使って, 極限值に π が関わる数列が考えられる.

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1.$$

まず, $0 \leq \sin x \leq 1$ であるから,

$$0 \leq (\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n \leq (\sin x)^{n-1} \leq 1.$$

以上から, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \leq \frac{\pi}{2}$ である. これより,

$$\frac{2m}{2m+1} = \frac{I_{2m+1}}{I_{2m-1}} \leq \frac{I_{2m}}{I_{2m-1}} \leq \frac{I_{2m-1}}{I_{2m-1}} = 1.$$

ところで, I_{2m} , I_{2m-1} の計算結果から,

$$\begin{aligned}\frac{I_{2m}}{I_{2m-1}} &= \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \pi \div \frac{2^{2(m-1)}\{(m-1)!\}^2}{(2m-1)!} \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \times \frac{(2m-1)!}{2^{2(m-1)}\{(m-1)!\}^2} \pi \\ &= \frac{(2m)!}{2 \cdot 2^{2m}(m!)^2} \times \frac{(2m-1)!}{2^{2m-2}\{(m-1)!\}^2} \times \frac{2m}{2m} m \pi \\ &= \left(\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \right)^2 m \pi.\end{aligned}$$

ゆえに, はさみうちの原理から

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \right)^2 m \pi = 1.$$

これより

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{4m}(m!)^4}{m \{(2m)!\}^2} = \pi, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)! \sqrt{m}} = \sqrt{\pi}.$$

これらが **ウォリスの公式** と呼ばれる. 更に,

$$\begin{aligned}\frac{2^{4m}(m!)^4}{m\{(2m)!\}^2} &= \frac{\{(2m)(2m-2)\cdots 4\cdot 2\}^4}{m\{(2m)(2m-1)(2m-2)\cdots 2\cdot 1\}^2} \\&= \frac{\{(2m)(2m-2)\cdots 4\cdot 2\}^2}{m\{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1\}^2} \\&= \frac{\{(2m)(2m-2)\cdots 4\cdot 2\}^2}{(2m+1)\{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1\}^2} \frac{2m+1}{m} \\&= \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \frac{(2m-2)^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1} \times \frac{2m+1}{m}. \\ \therefore \frac{\pi}{2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{4m}(m!)^4}{m\{(2m)!\}^2} \times \frac{m}{2m+1} \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \frac{(2m-2)^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1} \\&= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)}.\end{aligned}$$

なお, $\prod_{k=1}^m a_k$ とは $a_1 a_2 \cdots a_m$ (相乗) であり, $\prod_{m=1}^{\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m a_k$.

$$\prod_{k=1}^m a = a^m, \quad \prod_{k=1}^m k = m!.$$

ウォリスの公式 (Wallis)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m)! \sqrt{m}} = \sqrt{\pi}, \quad \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{\pi}{2}.$$