

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 8)

定積分の計算

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

不定積分の計算をしっかりとやってきたので、定積分の計算を考えよう.

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続な関数であれば, $f(x)$ の原始関数 (不定積分) が存在する. それを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

定積分の計算の際には, 積分定数 C などものは不要である.

なお, 積分する関数が連続でない場合は, 別の考えが必要になる.
これについては別の機会に話をしよう.

不定積分の基本公式は以下のとおりであった.

$$\boxed{1} \quad \int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} & (a \neq -1), \\ \log |x| & (a = -1). \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}. \quad \text{特に, } \int e^x dx = e^x.$$

$$\boxed{3} \quad \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$\boxed{4} \quad \int \cos x dx = \sin x.$$

$$\boxed{5} \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}.$$

$$\boxed{6} \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

$$\boxed{7} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|.$$

$$\boxed{8} \quad \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数 (不定積分) の 1 つとする.

積分の基本公式を忠実に適用すればよい.

例 8.1.

$$(1) \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$(2) \int_0^2 4e^x dx = \left[4e^x \right]_0^2 = 4 \left[e^x \right]_0^2 = 4(e^2 - e^0) = 4(e^2 - 1).$$

$e^0 = 1$ に注意

$$(3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}} dx = \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ = \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$f(ax + b)$ の定積分も、不定積分を求めて、代入して、引き算する点は同じである. a の影響が必ず出るので注意して計算しよう.

例 8.2.

$$\begin{aligned}(1) \quad \int_0^3 e^{-2x} dx &= \int_0^3 e^{-2x} \frac{d(-2x)}{-2} = \left[\frac{1}{-2} e^{-2x} \right]_0^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2} e^{-6} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^0 \right) = -\frac{1}{2} e^{-6} + \frac{1}{2} = \frac{1 - e^{-6}}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int_0^1 \frac{1}{3x+1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{3x+1} \frac{d(3x+1)}{3} = \left[\frac{1}{3} \log |3x+1| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \log 4 - \frac{1}{3} \log 1 = \frac{1}{3} \log 2^2 = \frac{2}{3} \log 2. \quad \log 1 = 0 \text{ に注意}\end{aligned}$$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ の定積分も同じである.

例 8.3. $\int_0^\pi \frac{2 \sin x}{3 + \cos x} dx.$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{2 \sin x}{3 + \cos x} dx &= \int_0^\pi \frac{-2(-\sin x)}{3 + \cos x} dx = \int_0^\pi \frac{-2(3 + \cos x)'}{3 + \cos x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{-2}{3 + \cos x} d(3 + \cos x) = \left[-2 \log |3 + \cos x| \right]_0^\pi \\ &= -2 \log(3 + \cos \pi) + 2 \log(3 + \cos 0) = -2 \log 2 + 2 \log 4 \\ &= -2 \log 2 + 2 \log 2^2 = -2 \log 2 + 2 \times 2 \log 2 = 2 \log 2. \end{aligned}$$

$\log a^b = b \log a$ に注意

三角関数の積になっているものの定積分はよく出てくる.

例 8.4. $\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 2x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 3x \cos 2x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(3x + 2x) + \sin(3x - 2x)] dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{-\cos 5x}{5} + \frac{1}{2} (-\cos x) \right]_0^{\pi} \\ &= \left[-\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \left(-\frac{1}{10} \cos 5\pi - \frac{1}{2} \cos \pi \right) - \left(-\frac{1}{10} \cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 \right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

定積分でも、有理関数の積分は部分分数分解などをしっかりしよう。

例 8.5. $\int_2^3 \frac{x}{x^2 + x - 2} dx$

まずは部分分数分解を行う. $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

$$\frac{x}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \quad x = A(x + 2) + B(x - 1)$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 3A, \quad x = -2 \Rightarrow -2 = -3B. \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} + \frac{\frac{2}{3}}{x + 2} dx &= \left[\frac{1}{3} \log |x - 1| + \frac{2}{3} \log |x + 2| \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} \log 2 + \frac{2}{3} \log 5 \right) - \left(\frac{1}{3} \log 1 + \frac{2}{3} \log 4 \right) \\ &= \frac{1}{3} (\log 2 + 2 \log 5 - 2 \log 4) = \frac{1}{3} (\log 2 + 2 \log 5 - 2 \times 2 \log 2) \\ &= \frac{1}{3} (2 \log 5 - 3 \log 2) = \frac{1}{3} \log \frac{25}{8}. \end{aligned}$$

定積分の定義は、本来、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) (x_k - x_{k-1}).$$

ただし、 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,
 $x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$),
 $|\Delta x| = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$.

定積分に関しては、次のような性質がある (上の定義を用いても示せる).

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

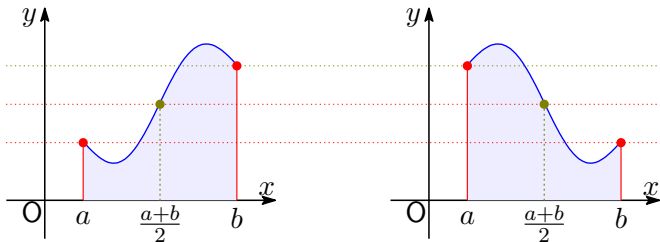
$$(2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$(3) f(x) \leq g(x) \ (a \leq x \leq b) \text{ のとき, } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

さらに、定積分がグラフ下にできる図形の面積ということから、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

(定積分の定義を用いて示すことができるが、直感的に理解できるだろう)。



特に、

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx.$$

例 8.6. $\int_{-2}^2 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$

$I = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ とおく. y 軸反転を考えることで,

$$\begin{aligned} 2I &= I + I = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{e^x + 1} dx + \int_{-2}^2 \frac{(-x)^2}{e^{-x} + 1} dx \\ &= \int_{-2}^2 x^2 \left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} \right) dx = \int_{-2}^2 x^2 \left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-2}^2 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = I = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

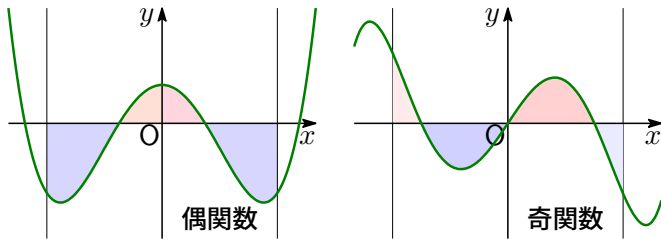
偶関数と奇関数

$f(-x) = f(x)$ となる関数を **偶関数** (even function),
 $f(-x) = -f(x)$ となる関数を **奇関数** (odd function)
という. 偶奇は x^m の m の偶奇に由来する.

偶関数: $1, x^2, x^4, x^{20}, \cos x$ など.

奇関数: $x, x^3, x^7, \sin x, \tan x$ など.

偶関数のグラフは y 軸対称, 奇関数のグラフは原点对称である.



図形の面積が定積分のことだから, $f(x)$ が $-a \leq x \leq a$ で連続であれば

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & f(x) \text{ が偶関数,} \\ 0 & f(x) \text{ が奇関数.} \end{cases}$$

また, 偶関数や奇関数でないものは, 偶関数と奇関数の和に分解できる:

$$f_E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ (偶関数)}, \quad f_O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ (奇関数)},$$

$$\Rightarrow f(x) = f_E(x) + f_O(x).$$

$f(x) = e^x$ のときは,

$$f_E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

$$f_O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

これらを**双曲線関数**という. これらは三角関数に類似する性質がある.

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1. \quad \cosh ix = \cos x, \quad \sinh ix = i \sin x.$$

また,

$$\tanh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

例 8.7. $\int_{-3}^3 \frac{x+6}{x^2+3} dx.$

$\frac{x+6}{x^2+3} = \frac{x}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+3}. f(x) = \frac{x}{x^2+3}, g(x) = \frac{6}{x^2+3}$ とおくと,
 $f(x)$ は奇関数, $g(x)$ は偶関数である:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+3} = -\frac{x}{x^2+3} = -f(x),$$

$$g(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = g(x).$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 \frac{x+6}{x^2+3} dx &= 2 \int_0^3 \frac{6}{x^2+3} dx = 2 \left[6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^3 \\ &= 4\sqrt{3} \tan^{-1} \sqrt{3} - 4\sqrt{3} \tan^{-1} 0 = 4\sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi. \end{aligned}$$

$f(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ で連続な関数とする.

このとき, 定積分の定義で分割 Δx を等分割にすれば

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow |\Delta x| = \frac{1}{n}.$$

c_k は $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ であればよいので, $c_k = x_k$ とすれば,

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

これが区分求積法である.

なお、この計算方法を変形することで、次もわかる。

中点公式: $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = \frac{2k-1}{n}$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

代表点 c_k を中点にして計算するもの。

台形公式: $c_k = x_k = \frac{k}{n}$ と $c_k = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$ の平均

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right\}.$$

短冊を長方形に見立てて計算するもの。

極限值を考えなければ、定積分が近似値で求められるということになる。
詳しくは数値積分法を参照してほしい。

例 8.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$

まず,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

したがって, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ とおけば, 求めたい極限值は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

である. ここで, 区分求積法により, この極限值は $\int_0^1 f(x) dx$ と一致することがわかる. ゆえに,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{(1+x)'}{1+x} dx = \left[\log |1+x| \right]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

求める極限值は $\log 2$ であった.

定積分の性質の 1 つである

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$$

を利用して、次の級数の値を求めてみる.

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

まず,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1).$$

(1) $\log 2$ になる級数. $r = -x$ として, $0 \leq x \leq 1$ で積分をすれば,

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \int_0^1 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1 + x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x} dx + \int (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1 + x} dx \\ &= \left[\log |1 + x| \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int \frac{x^n}{1 + x} dx \\ &= \log 2 + (-1)^{n+1} \int \frac{x^n}{1 + x} dx.\end{aligned}$$

さて, $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ だから,

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$-\frac{1}{n+1} \leq (-1)^{n+1} \int \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\therefore \log 2 - \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \leq \log 2 + \frac{1}{n+1}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log 2 - \frac{1}{n+1} \right) = \log 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log 2 + \frac{1}{n+1} \right) = \log 2$ より
はさみうちの原理から

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots .$$

(2) $\frac{\pi}{2}$ になる級数. $r = -x^2$ として, $0 \leq x \leq 1$ で積分をすれば,

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \int_0^1 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx + (-1)^{n+1} \int \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx \\ &= \left[\tan^{-1} x \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \int \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx.\end{aligned}$$

さて, $\frac{1}{2} x^{2n} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$ だから,

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^{2n} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx.$$

$$\therefore \frac{1}{2(2n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}.$$

$$-\frac{1}{2n+1} \leq (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}.$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1} \leq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4} \text{ より}$$

はさみうちの原理から

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots.$$