微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 7)
無理関数の積分

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

今回は, 無理関数, 特に $\sqrt[n]{\text{多項式}}$ が含まれる関数の積分について考えてみる. なお,

$$\int \frac{1}{\sqrt{b^2-(x-a)^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x-a}{b}.$$

は置換積分せずともすぐに使えるようにしておこう.

例 7.1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$

$3-2x-x^2$ を平方完成すると,

$$3-2x-x^2 = -(x^2+2x)+3 = -(x+1)^2+1^2+3 = -(x+1)^2+4.$$

したがって,

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x+1}{2}.$$

原則ルール

$\sqrt[n]{ax+b}$ を含む積分は，$t = \sqrt[n]{ax+b}$ とおいて置換積分する.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx = \int R\Big(\frac{t^n - b}{a}, t\Big)\,\frac{nt^{n-1}}{a}\,dt.$$

例 7.2. $\displaystyle\int \frac{6x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

$t = \sqrt{2x+1}$ とおくと $t^2 = 2x+1$ だから,
$x = \dfrac{t^2-1}{2}$, $dx = t\,dt$. これより

$$\begin{aligned}\int \frac{6x}{\sqrt{2x+1}}\,dx &= \int \frac{3(t^2-1)}{t}\,t\,dt = \int 3t^2 - 3\,dt = t^3 - 3t \\ &= (\sqrt{2x+1})^3 - 3\sqrt{2x+1} = \sqrt{2x+1}\,(2x+1-3) \\ &= 2(x-1)\sqrt{2x+1}.\end{aligned}$$

例 7.3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx.$

$t=\sqrt{x-1}$ とおくと $t^2=x-1$ だから, $x=t^2+1$, $dx=2t\,dt$. これより

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx &= \int \frac{t}{t^2+1}\,2t\,dt \\ &= \int \frac{2\,t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2\,(t^2+1)-2}{t^2+1}\,dt = \int 2-\frac{2}{t^2+1}\,dt \\ &= 2\,t-2\,\tan^{-1}t = 2\sqrt{x-1}-2\,\tan^{-1}\sqrt{x-1}.\end{aligned}$$

根号内が 2 次以上の場合にも, まずは $t = \sqrt[n]{f(x)}$ とおく置換積分によって計算ができるかどうかを考えよう.

例 7.4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx.$

$t = \sqrt{x^2+3}$ とおくと $t^2 = x^2 + 3$.

$2t\,dt = 2x\,dx$ だから, $dx = \dfrac{t}{x}\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \frac{x}{t}\,\frac{t}{x}\,dt = \int 1\,dt = t = \sqrt{x^2+3}.$$

例 7.5. $\displaystyle\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$.

$t=\sqrt{9-x^2}$ とおくと $t^2=9-x^2$.

$2t\,dt=-2x\,dx$ だから, $dx=\dfrac{t}{-x}\,dt$

$$\int x\sqrt{9-x^2}\,dx=\int x\,t\,\frac{t}{-x}\,dt=\int -t^2\,dt=-\frac{1}{3}\,t^3$$
$$=-\frac{1}{3}\,(\sqrt{9-x^2})^3=-\frac{1}{3}\,(9-x^2)\,\sqrt{9-x^2}.$$

例 7.6. $\displaystyle\int (x^2+1)\sqrt[5]{2x^3+6x+1}\,dx.$

$t=\sqrt[5]{2x^3+6x+1}$ とおくと $t^5=2x^3+6x+1.$

$5t^4\,dt=(6x^2+6)\,dx$ だから, $dx=\dfrac{5\,t^4}{6\,(x^2+1)}\,dt$

$$\int (x^2+1)\sqrt[5]{2x^3+6x+1}\,dx=\int (x^2+1)t\,\frac{5\,t^4}{6\,(x^2+1)}\,dt$$

$$=\int \frac{5}{6}\,t^5\,dt=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\,t^6$$

$$=\frac{5}{36}\,(\sqrt[5]{2x^3+6x+1})^6=\frac{5}{36}\,(2x^3+6x+1)^{\frac{6}{5}}.$$

原則ルールが使えない場合

有名なものとして, 次の 4 つの結果を取り上げよう.

$$(a1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}.$$ **(積分の基本公式)**

$$(a2) \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

$$(b1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}\, dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right|.$$

$$(b2) \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right|.$$

$(a2)$ の証明

方法 1 置換積分でやってみる. $x = a\,\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおく.
このとき, $dx = a\,\cos\theta\,d\theta$ であり,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\,\sin^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\,\cos^2\theta} \\ &= a\left|\cos\theta\right| = a\,\cos\theta.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a\,\cos\theta\,a\,\cos\theta\,d\theta = \int a^2\,\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \frac{a^2}{2}(\theta + \sin\theta\,\cos\theta).\end{aligned}$$

ここで, $x = a\,\sin\theta$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\,\cos\theta$ より

$$\sin\theta = \frac{x}{a}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}, \quad \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

これらに注意すると,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\Big(\theta + \sin\theta\ \cos\theta\Big) = \frac{a^2}{2}\ \sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\ \frac{x}{a}\ \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$
$$= \frac{a^2}{2}\ \sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\, x\, \sqrt{a^2 - x^2}.$$

方法 2 部分積分でやってみる.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int 1 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int (x)' \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \left(-\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx$$

$$= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

したがって, 移項して,

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

$t = x + \sqrt{x^2 + A}$ とおいて置換積分する.

$t - x = \sqrt{x^2 + A}$ だから $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + A$. よって

$$x = \frac{t^2 - A}{2\,t} = \frac{1}{2}\,t - \frac{A}{2\,t}, \quad \sqrt{x^2 + A} = t - x = \frac{t^2 + A}{2\,t} = \frac{1}{2}\,t + \frac{A}{2\,t},$$

$$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2t^2}\right) dt = \frac{t^2 + A}{2\,t^2}\,dt.$$

したがって,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}\,dx = \int \frac{2\,t}{t^2 + A}\,\frac{t^2 + A}{2\,t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \log|t| = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right|.$$

$(a2)$ と同様である.

方法 1 置換積分でやってみる.
$t = x + \sqrt{x^2 + A}$ とおく. $(b1)$ と同様に

$$x = \frac{t^2 - A}{2\,t} = \frac{1}{2}\,t - \frac{A}{2\,t}, \quad \sqrt{x^2 + A} = t - x = \frac{t^2 + A}{2\,t} = \frac{1}{2}\,t + \frac{A}{2\,t},$$

$$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2t^2}\right) dt = \frac{t^2 + A}{2\,t^2}\,dt.$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+A}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\,t + \frac{A}{2\,t}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2t^2}\right) dt = \int \left(\frac{1}{4}\,t + \frac{A}{2\,t} + \frac{A^2}{4\,t^3}\right) dt \\
&= \frac{1}{8}\,t^2 + \frac{A}{2}\,\log|t| - \frac{A^2}{8\,t^2} = \frac{1}{8}\left(t^2 - \frac{A^2}{t^2}\right) + \frac{A}{2}\,\log|t| \\
&= \frac{1}{8}\left(t - \frac{A}{t}\right)\left(t + \frac{A}{t}\right) + \frac{A}{2}\,\log|t| \\
&= \frac{1}{8}\,(2x)\,2\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\,\log|x + \sqrt{x^2+A}| \\
&= \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\,\log|x + \sqrt{x^2+A}|.
\end{aligned}
$$

方法 2 部分積分でやってみる.

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \int 1\,\sqrt{x^2+A}\,dx = \int (x)'\,\sqrt{x^2+A}\,dx$$

$$= x\,\sqrt{x^2+A} - \int x\,(\sqrt{x^2+A})'\,dx = x\,\sqrt{x^2+A} - \int x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$

$$= x\,\sqrt{x^2+A} + \int \frac{-x^2-A+A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$

$$= x\,\sqrt{x^2+A} + \int \left(-\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\right)dx$$

$$= x\,\sqrt{x^2+A} - \int \sqrt{x^2+A}\,dx + A\,\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|.$$

したがって, 移項して,

$$2\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\,\sqrt{x^2+A} + A\,\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|.$$

$$\therefore\ \int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\,\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|.$$

例 7.7. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+1}\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{4x^2+1}\,dx &= \int \sqrt{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\,dx = \int 2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right| \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|.
\end{aligned}
$$

おまけ 1: 三角関数を利用した方法

$\sqrt{2\text{ 次式}}$ を含む関数の積分を行うのに, 三角関数を用いて置換積分をする方法もある.
もちろん, 根号内をいったん平方完成することを忘れないように.

$\sqrt{a^2 - x^2}$ (先述)

$x = a\sin\theta$ と置く. θ の範囲は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意する.

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx = \int R(a\sin\theta, a\cos\theta)\,a\cos\theta\,d\theta.$$

$\sqrt{x^2 + a^2}$

$x = a\tan\theta$ と置く. θ の範囲は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意する.

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx = \int R\left(a\tan\theta, \frac{a}{\cos\theta}\right)\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta.$$

$\sqrt{x^2 - a^2}$

$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$ と置く. θ の範囲は, 対応する x によって変わるので注意する.

- $x \geqq a$ のときは $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$,
- $x \leqq -a$ のときは $\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$.

$$\int R\bigl(x, \sqrt{x^2 - a^2}\bigr)\, dx = \int R\Bigl(\frac{a}{\cos\theta}, a\tan\theta\Bigr) \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta.$$

無理関数を含む積分を三角関数を用いて計算した例を紹介する.

例 7.8. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$. **別解.**

$x = \tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}. dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta \\ &= \int \frac{\cos\theta}{(\cos^2\theta)^2}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta.\end{aligned}$$

$t = \sin\theta$ とおくと, $dt = \cos\theta\, d\theta$ であるから,

$$\int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{(1-t^2)^2}\, \frac{1}{\cos\theta}\, dt = \int \frac{1}{(t^2-1)^2}\, dt$$

$$\frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}.$$

$$1 = A\,(t+1)\,(t-1)^2 + B\,(t-1)^2 + C\,(t-1)\,(t+1)^2 + D\,(t+1)^2.$$

$$t=-1 \ \Rightarrow\ 1 = 4\,B.\ \ B = \frac{1}{4}.\quad t = 1 \ \Rightarrow\ 1 = 4\,D.\ \ D = \frac{1}{4}.$$

$$t = 0 \ \Rightarrow\ 1 = A + B - C + D.\ \ A - C = \frac{1}{2}.$$

$$t = 2 \ \Rightarrow\ 1 = 3\,A + B + 9\,C + 9\,D.\ \ 3\,A + 9\,C = -\frac{5}{2}.$$

$$A = \frac{1}{4},\ \ C = -\frac{1}{4}.$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\log|t-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} \\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1} \\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{(\sin\theta)^2-1} = \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.
\end{aligned}
$$

$x = \tan\theta$, $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ だったから,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} \\
&= \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)^2 = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2, \\
&\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \tan\theta\,\frac{1}{\cos\theta} = x\sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta = \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

おまけ 2: 根号内が 1 次分数 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の場合

$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおいて置換積分する.

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{d\,t^n - b}{a - c\,t^n}, t\right) \frac{n\,(ad-bc)\,t^{n-1}}{(a-c\,t^n)^2}\,dt.$$

例 7.9. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$

$t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ とおくと $t^2 = \dfrac{1+x}{1-x}$ より

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{1+t^2}.$$

$$dx = -2\,[(1+t^2)^{-1}]'\,dt = -2 \times (-1)\,(1+t^2)^{-2}\,2t\,dt = \frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

したがって,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int t\,\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int t\left(\frac{-2}{1+t^2}\right)'dt$$

$$= t\left(\frac{-2}{1+t^2}\right) - \int (t)'\left(\frac{-2}{1+t^2}\right) = \frac{-2\,t}{1+t^2} - \int \frac{-2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{-2\,t}{1+t^2} - (-2)\times \tan^{-1} t = \frac{-2\,t}{1+t^2} + 2\,\tan^{-1} t$$

$$= -2\,\frac{1-x}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 2\,\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad 1+t^2 = 1+\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{1-x}$$

$$= -\sqrt{(1+x)(1-x)} + 2\,\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\frac{1+x}{1-x} \geqq 0 \Rightarrow -1 \leqq x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + 2\,\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

ちなみに, $x = \sin\theta$ とおいて計算することもできる.

$x = \sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}. \qquad dx = \cos\theta\, d\theta.$$

したがって,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta\, d\theta = \int 1 + \sin\theta\, d\theta$$
$$= \theta - \cos\theta = \theta - \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}.$$