

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 6)

三角関数の積分

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

今回は三角関数の積分を考える.

はじめに, 次が基本公式であった (微分とごっちゃまぜにしないこと)

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax, \quad \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

積分と微分でごちゃごちゃになっている人も多いので注意しておこう.

	$\sin ax$	$\cos ax$
微分	$a \cos ax$	$-a \sin ax$
積分	$-\frac{1}{a} \cos ax$	$\frac{1}{a} \sin ax$

① 三角関数 (sin, cos) 同士の積

次を使って、積を和に変える.

倍角の公式・積を和に変換する公式

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

覚えていない人は無理に覚えるのではなく、使えばいいんだ
ということを理解してくれるだけで充分.

例 6.1.

$$\begin{aligned}(1) \quad \int \sin^2 2x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin 4x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int \sin 2x \cos x \, dx \quad \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \\ &= \int \frac{\sin 3x + \sin x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x.\end{aligned}$$

2 置換積分できるタイプ

$$(1) \int R(\sin x) \cos x \, dx = \int R(t) \, dt$$

$t = \sin x$ と置換, $dt = \cos x \, dx$.

$$(2) \int R(\cos x) \sin x \, dx = - \int R(t) \, dt$$

$t = \cos x$ と置換, $dt = -\sin x \, dx$.

$$(3) \int R(\tan x) \, dx = \int \frac{R(t)}{1+t^2} \, dt$$

$t = \tan x$ と置換, $dt = (1 + \tan^2 x) \, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} \, dt$.

例 6.2.

$$\begin{aligned}(1) \quad \int \sin^4 x \cos x \, dx &= \int t^4 \cos x \frac{1}{\cos x} \, dt \quad t = \sin x \text{ と置換} \\ &= \int t^4 \, dt = \frac{1}{5} t^5 = \frac{1}{5} \sin^5 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx &= \int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} \sin x \, dx \quad t = \cos x \text{ と置換} \\ &= \int t^{-\frac{3}{2}} \sin x \frac{1}{-\sin x} \, dt = - \int t^{-\frac{3}{2}} \, dt = -\frac{2}{-1} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}.\end{aligned}$$

例 6.3. $\int \tan^3 x \, dx.$

$t = \tan x$ と置く. $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx$ なので,
 $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$ である.

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int t^3 \frac{1}{1 + t^2} dt = \int t - \frac{t}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \log |1 + t^2| = \frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 x). \end{aligned}$$

別解

$$\tan^3 x = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x$$

ということから, $t = \cos x$ と置くことで,

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - t^2}{t^3} \sin x \frac{1}{-\sin x} \, dt \\ &= \int -t^{-3}(1 - t^2) \, dt = \int -t^{-3} + t^{-1} \, dt \\ &= -\frac{1}{-2} t^{-2} + \log |t| = \frac{1}{2t^2} + \log |t| = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \log |\cos x|.\end{aligned}$$

特に三角関数の積分では, 置換積分の置き方が複数あり, その方法に応じて見た目上答えが異なることが多い. 三角関数の性質を用いれば, 定数の違いを除いて答えは完全に一致する.

③ 多項式と三角関数 ($\sin, \cos$) との積

三角関数の方を先に積分する部分積分を実行せよ.

例 6.4.

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int x (-\cos x)' \, dx = x (-\cos x) - \int (x)' (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x - (-\sin x) = -x \cos x + \sin x.\end{aligned}$$

三角関数が $\tan x$ であったり, 相方の関数が自然数乗になっていない場合には, 通常計算できない.

4 部分積分できるタイプ (漸化式)

$I_n = \int (\sin x)^n dx$, $J_n = \int (\cos x)^n dx$ は次の漸化式が成立する.

$$I_n = -\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

$$I_0 = x, \quad I_1 = -\cos x.$$

$$J_n = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

$$J_0 = x, \quad J_1 = \sin x.$$

置換積分したくなるが、相方の関数 ($(\sin x)^n$ だったら $\cos x$) がないので、このままでは置換積分法で計算できない。

証明 部分積分を用いれば

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx = \int (\sin x)^{n-1} (-\cos x)' \, dx \\ &= (\sin x)^{n-1} (-\cos x) - \int [(\sin x)^{n-1}]' (-\cos x) \, dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x - \int [(n-1) (\sin x)^{n-2} \cos x] (-\cos x) \, dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n \, dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) (I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

I_n について解けば,

$$I_n + (n-1) I_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) I_{n-2}.$$

同様にして,

$$\begin{aligned} J_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx = \int (\cos x)^{n-1} (\sin x)' \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} (\sin x) - \int [(\cos x)^{n-1}]' (\sin x) \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int [(n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)] \sin x \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) (J_{n-2} - J_n). \end{aligned}$$

J_n について解けば,

$$J_n + (n-1) J_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) J_{n-2}.$$

例 6.5. $\int \cos^5 x \, dx.$

先ほど作った漸化式において J_5 を求めればよい.

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{1}{5} (\cos x)^4 \sin x + \frac{4}{5} J_3 \\ &= \frac{1}{5} (\cos x)^4 \sin x + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} (\cos x)^2 \sin x + \frac{2}{3} J_1 \right) \\ &= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x. \end{aligned}$$

$$J_n = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

なお、奇数次であれば、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を利用することで、置換積分により計算ができる形に変形ができる。

別解

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &\quad \sin x = t \text{ と置換. } \cos x \, dx = dt. \, dx = \frac{1}{\cos x} \, dt. \\ &= \int (1 - t^2)^2 \cos x \frac{1}{\cos x} \, dt = \int t^4 - 2t^2 + 1 \, dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x.\end{aligned}$$

答えが違うように見えるが、三角関数ではよくあることである。
先ほどと実態は同じである。

できれば、この方法を利用するのは避けたい。

$t = \tan \frac{x}{2}$ ($x = 2 \tan^{-1} t$) において置換積分する。

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

ちなみに,

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2t}{1+t^2} \div \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2} \div \frac{2}{1+t^2} = t$$

である。

例 6.6. $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx.$

$t = \tan \frac{x}{2}$ と置けば, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$

$1 + \cos x = \frac{2}{1 + t^2}$ であるから,

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 + t^2}{2} \times \frac{2}{1 + t^2} dt = \int 1 dt = t = \tan \frac{x}{2}.$$

できれば, 究極の奥義を使うのは避けたいところである.

例 6.7. $\int \frac{1}{\cos x} dx.$

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ と置けば, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{-t^2+1} dt \\ &= \int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} dt = \log |t+1| - \log |t-1| \\ &= \log \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \log \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right|. \end{aligned}$$

(2) $t = \sin x$ とおけば, $dt = \cos x dx$ より $dx = \frac{1}{\cos x} dt$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - t^2} \frac{1}{\cos x} dt$$
$$= \int \frac{1}{1 - t^2} dt \quad 1 - t^2 = (1 + t)(1 - t) = -(t + 1)(t - 1)$$

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1}. \quad -1 = A(t - 1) + B(t + 1).$$

$$t = -1 \Rightarrow -1 = -2A. \quad t = 1 \Rightarrow -1 = 2B. \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t + 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t - 1} dt = \frac{1}{2} \log |t + 1| - \frac{1}{2} \log |t - 1|$$
$$= \frac{1}{2} \log |\sin x + 1| - \frac{1}{2} \log |\sin x - 1| = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

答えの見た目が違うが, 同じものである.

おまけ 1: 漸化式について

$K_n = \int \frac{1}{(\sin x)^n} dx$, $L_n = \int \frac{1}{(\cos x)^n} dx$ も漸化式を作ることができる.

ここでは証明しない.

$$K_n = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{(\sin x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}. \quad (n \geq 3),$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}, \quad K_2 = -\frac{1}{\tan x},$$

$$L_n = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} L_{n-2}. \quad (n \geq 3),$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \quad L_2 = \tan x,$$

おまけ 2: 究極の奥義を使ってみる

例 6.8. $\int \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx.$

$t = \tan \frac{x}{2}$ と置けば, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx &= \int \frac{1}{5 + 4 \times \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{5(1+t^2) + 4(1-t^2)} dt = \int \frac{2}{9+t^2} dt \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{t}{3} = \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{\tan \frac{x}{2}}{3}. \end{aligned}$$

$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ を利用すれば,

$$\int \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx = \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{\sin x}{3(1 + \cos x)}.$$

例 6.9. $\int \frac{1}{4 + 5 \cos x} dx.$

$t = \tan \frac{x}{2}$ と置けば, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4 + 5 \cos x} dx &= \int \frac{1}{4 + 5 \times \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{4(1+t^2) + 5(1-t^2)} dt = \int \frac{2}{9-t^2} dt = \int \frac{\frac{1}{3}}{t+3} + \frac{-\frac{1}{3}}{t-3} dt \\ &= \frac{1}{3} \log |t+3| - \frac{1}{3} \log |t-3| = \frac{1}{3} \log \left| \frac{t+3}{t-3} \right| = \frac{1}{3} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 3}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right|. \end{aligned}$$

$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ を利用すれば,

$$\int \frac{1}{4 + 5 \cos x} dx = \frac{1}{3} \log \left| \frac{\sin x + 3 \cos x + 3}{\sin x - 3 \cos x - 3} \right|.$$