

微分積分 2(積分) 自習スライド (Part 3)

置換積分法 (不定積分)

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

積分を計算するうえで、必要となってくる置換積分法について紹介する.
その前に、合成関数の微分法を思い出しておこう.

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) g'(x).$$

$x = g(t)$ のとき,

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

証明 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数, $G(t) = F(g(t))$ とする. このとき,

$$F'(x) = f(x), \quad G'(t) = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t).$$

$F(x)$ と $G(t)$ は $x = g(t)$ という関係式の下で一致しているから,

$$\int f(x) dx = F(x) = F(g(t)) = G(t) = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

置換積分は x と t の役割を逆にした, 次の形としても使われる.

$$t = g(x) \text{ のとき } \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

また, $dg(t) = g'(t) dt$ と書くことを許してもらえるのならば,

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

置換積分は、次の流れで行う。

Step 1 (HARD) 何を何とおくのか決定する。

$$t = g(x) \quad \text{または} \quad x = h(t)$$

これで積分の計算が続行できるか否か、難易度が変わる。
経験値がモノを言うので、たくさん練習しよう。

Step 2 微分する。

$$\frac{dt}{dx} = g'(x) \Rightarrow dt = g'(x) dx \quad \text{または} \quad \frac{dx}{dt} = h'(t) \Rightarrow dx = h'(t) dt$$

Step 3 x の積分にある x の式を以上で出てきた関係式を用いて t の式に書き換える。

Step 4 x が完全に消え、 t だけの式になったのを確認して、 t で積分する。

Step 5 x の式に戻す!

前回紹介した積分公式は、置換積分を用いて計算してもよい。

例 3.1. $\int \sqrt{2x-1} dx$

$t = 2x - 1$ と置くと, $\frac{dt}{dx} = 2$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x-1} dx &= \int \sqrt{t} \frac{1}{2} 2 dx = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} dx = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt \\ &= \int \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

$\frac{dt}{dx} = 2$ だが, $dt = 2 dx$ と書き表すのである。

このとき, 次のような形で書いてもよい.

$dt = 2 dx$ だから $dx = \frac{1}{2} dt$ であり,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x-1} dx &= \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \int \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}}. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}\end{aligned}$$

例 3.2. $\int \frac{x}{(x^2 + 5)^3} dx$

$t = x^2 + 5$ と置くと, $dt = 2x dx$, $dx = \frac{1}{2x} dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2 + 5)^3} dx &= \int \frac{x}{t^3} \frac{1}{2x} dt = \int \frac{1}{2} t^{-3} dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{-2} t^{-2} = -\frac{1}{4} t^{-2} \\ &= -\frac{1}{4t^2} = -\frac{1}{4(x^2 + 5)^2} \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}\end{aligned}$$

例 3.3. $\int \tan x \, dx$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ だから, $t = \cos x$ と置く. $\frac{dt}{dx} = -\sin x$.

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-1}{t} (-\sin x) \, dx = \int -\frac{1}{t} \frac{dt}{dx} \, dx \\ &= \int -\frac{1}{t} \, dt = -\log |t| = -\log |\cos x|.\end{aligned}$$

$dt = -\sin x \, dx$ だから, 次のように進めてもよい. $dx = \frac{1}{-\sin x} dt$ より,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin x}{t} \frac{1}{-\sin x} dt = \int -\frac{1}{t} dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \\ &= -\log |t| = -\log |\cos x|. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}\end{aligned}$$

もう少し置換積分を用いた積分の計算をやってみよう.

例 3.4. $\int x^2 e^{x^3} dx$

$t = x^3$ と置くと, $dt = 3x^2 dx$ だから, $dx = \frac{1}{3x^2} dt$.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3} dx &= \int x^2 e^t \frac{1}{3x^2} dt = \int \frac{1}{3} e^t dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \\ &= \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{x^3}. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}\end{aligned}$$

$t = e^{x^3}$ と置いて計算してもよい.

例 3.5. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

$t = \sin x$ と置くと, $dt = \cos x dx$ だから, $dx = \frac{1}{\cos x} dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos x}{t^3} \frac{1}{\cos x} dt = \int t^{-3} dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \\ &= \frac{1}{-2} t^{-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x}. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す} \end{aligned}$$

※ $\frac{1}{\sin^2 x}$ を $\sin^{-2} x$ と書かないように.

例 3.6. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx$

$t = x^2 + 3$ と置くと, $dt = 2x dx$ だから, $dx = \frac{1}{2x} dt$.

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx = \int x^3 \sqrt{t} \frac{1}{2x} dt$$

$$= \int \frac{1}{2} x^2 \sqrt{t} dt \quad \leftarrow x \text{ がまだ残っている}$$

$$= \int \frac{1}{2} (t - 3) \sqrt{t} dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \quad \text{※ } x^2 = t - 3$$

$$= \int \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5} (x^2 + 3)^{\frac{5}{2}} - (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}$$

なお, 最後の式変形を次のようにしてもよい.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{5}t^{\frac{3}{2}}(t - 5) \\ &= \frac{1}{5}(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}(x^2 + 3 - 5) = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}(x^2 - 2).\end{aligned}$$

別解.

$$t = \sqrt{x^2 + 3} \text{ と置くと, } dt = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} dx = \frac{x}{t} dx \text{ だから, } dx = \frac{t}{x} dt.$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx = \int x^3 t \frac{t}{x} dt$$

$$= \int x^2 t^2 dt \quad \leftarrow x \text{ がまだ残っている}$$

$$t^2 = x^2 + 3 \\ \downarrow$$

$$= \int (t^2 - 3) t^2 dt \quad \leftarrow t \text{ だけの式になった} \quad ※ x^2 = t^2 - 3$$

$$= \int t^4 - 3t^2 dt = \frac{1}{5} t^5 - 3 \frac{1}{3} t^3$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - t^3 = \frac{1}{5} (\sqrt{x^2 + 3})^5 - (\sqrt{x^2 + 3})^3. \quad \leftarrow x \text{ の式に戻す}$$

$dt = \frac{x}{t} dx$ だったわけだが, これは $t^2 = x^2 + 3$ ということから,
次のように取り扱ってよいということに注意しよう.

$$d(t^2) = d(x^2 + 3). \quad \frac{d(t^2)}{dt} dt = \frac{d(x^2 + 3)}{dx} dx. \quad \therefore 2t dt = 2x dx.$$

置換積分といっても, いろいろな置き換え方があるので, いろいろなものを試してほしい.