

微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 12)

関数の極大・極小

鈴木 敏行

神奈川大学

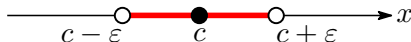
2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

最大と最小/極大と極小

c の近くとは, 適当に小さい $\varepsilon > 0$ を用いて範囲 $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$ のこと.



関数 $f(x)$ の定義域を I とする. $x \in I$ とは I にある数 x を表す.

- $f(x)$ が $x = a$ で最大であるとは

$$x \in I \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

- $f(x)$ が $x = a$ で最小であるとは

$$x \in I \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

- $f(x)$ が $x = a$ で (狭義の) 極大であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近くで } x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- $f(x)$ が $x = a$ で (狭義の) 極小であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近くで } x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a).$$

次を考えることもあるが、今回は扱わない。紹介だけはする。

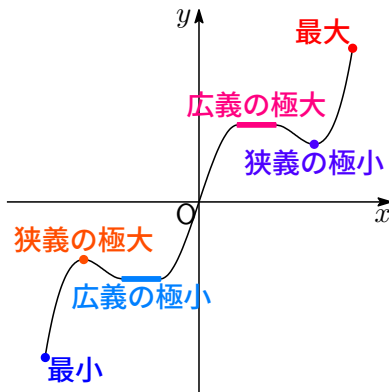
- $f(x)$ が $x = a$ で (広義の) 極大であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近く} \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

- $f(x)$ が $x = a$ で (広義の) 極小であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近く} \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

最大や極大については、次の図が参考になるのではと思われる。



局所的な最大が極大ということ。ただし、極大は最大の候補になる。

注意: 定義域の端では極大や極小は考えないものとする。

ところで、山の頂上に

- たどり着くにはひたすら登り続けなければならない。
- たどり着いた後はひたすら降り続けなければならない。



1 変数関数の場合には

極大: そこに至るまで増加し、その先は減少する。

極小: そこに至るまで減少し、その先は増加する。

したがって、関数の増減を調べれば、極大極小を調べることができる。

補足: 用語について

$x = a$ で $f(x)$ が

○ **極大**になるとき、場所 a を**極大点**, 値 $f(a)$ を**極大値**という。

○ **極小**になるとき、場所 a を**極小点**, 値 $f(a)$ を**極小値**という。

極大値, **極小値**をまとめて**極値**という。

増減と微分係数

- $f(x)$ が**狭義単調増加** とは

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- $f(x)$ が**狭義単調減少** とは

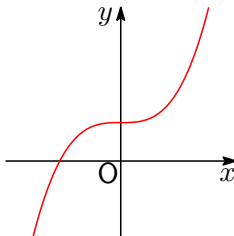
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- $f(x)$ が**(広義) 単調増加** とは

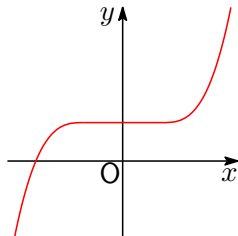
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- $f(x)$ が**(広義) 単調減少** とは

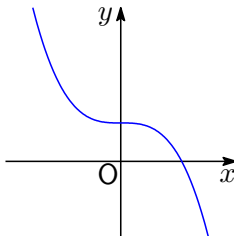
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$



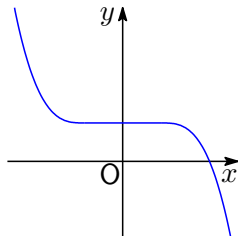
狭義単調増加



広義単調増加



狭義単調減少



広義単調減少

このとき、次の事実が重要である.

微分と増減その 1

$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であるとする.

(1) $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は狭義単調増加である.

(2) $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は狭義単調減少である.

一方で、逆については注意が必要である.

微分と増減その 2

$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であるとする.

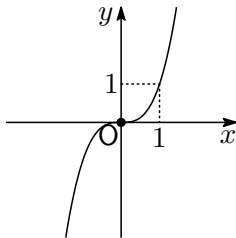
(1) $f(x)$ が単調増加ならば $f'(x) \geq 0$.

(2) $f(x)$ が単調減少ならば $f'(x) \leq 0$.

狭義単調増加であっても $f'(a) = 0$ となることがあることには注意.

例 12.1. $f(x) = x^3$

これは狭義単調増加な関数だが,
 $f'(0) = 0$ になっている.



微分と増減その1の証明

(1) $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ととする.

このとき, (ラグランジュの) 平均値定理から, 次をみたす c がある.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2.$$

仮定より $f'(c) > 0$. $x_2 - x_1 > 0$ だから $f(x_2) - f(x_1) > 0$ がいえる.
 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が言えたので, 狭義単調増加がわかる.

(2) は $f'(c)$ の符号が逆になって大小関係が逆になることに注意すれば
同じく証明できる.

微分と増減その2の証明

(1) $a < x < b$ とする.

$h > 0$ ならば $f(x) < f(x+h)$ なので, $f(x+h) - f(x) > 0$.

したがって, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ である (分母も分子も +).

$h < 0$ ならば $f(x+h) < f(x)$ なので, $f(x+h) - f(x) < 0$.

したがって, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ である (分母も分子も -).

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0. \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

(2) は大小関係が逆になって符号が逆になることに注意すれば
同じく証明できる.

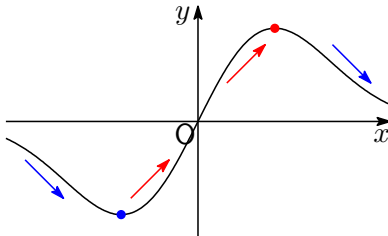
これまでのまとめ

極大は増加から減少に変わる場所である。

極小は減少から増加に変わる場所である。

$f'(x) > 0$ ならば狭義単調増加, $f'(x) < 0$ ならば狭義単調減少である。

したがって, $f'(x)$ の符号が変わるところで極大や極小になる。

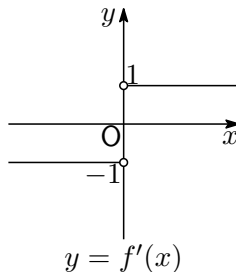
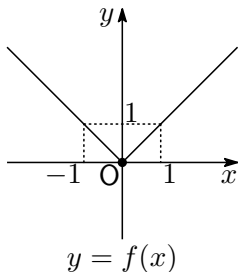


ただし, $f'(x)$ が存在しない場合も考えられる。

例 12.2. $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

$f'(0)$ は存在しないが, $f(x)$ は $x = 0$ で極小になっている.



一方で、次も成立する.

$f(x)$ が $x = a$ で極値をとり, $x = a$ で微分可能ならば, $f'(a) = 0$

証明: $x = a$ で極大であるとする.

$h > 0$ ならば $f(a) > f(a + h)$ なので, $f(a + h) - f(a) < 0$.

$$\therefore f'(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0. \quad (\text{分母: } +, \text{分子: } -).$$

$h < 0$ ならば $f(a + h) < f(a)$ なので, $f(a + h) - f(a) < 0$.

$$\therefore f'(a) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0. \quad (\text{分母: } -, \text{分子: } -).$$

以上から $f'(a) = 0$.

極小の場合も符号が逆になる点に注意すれば同じく証明できる.

当然だが、次は誤りである.

$f'(a) = 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で必ず極値をとる

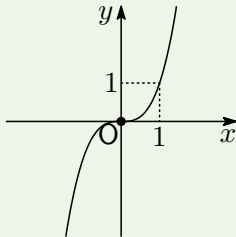
例 12.3. $f(x) = x^3$

$f(x)$ は狭義単調増加である.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

しかし、 $f'(x) = 3x^2$ だから、 $f'(0) = 0$ である.

$x = 0$ では極大でも極小でもない.



これらのことに注意すると、 $f(x)$ の極値をとる候補は

- $f'(x) = 0$ になるところ
 - $f'(x)$ が存在しないところ
- になる.

関数の増減をまとめた表が増減表というものである.

$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ を例にしてやってみる.

(1) $f'(x)$ を求める.

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3).$$

(2) $f'(x)$ の符号が入れ替わる場所を探す.

$f'(x)$ が 0 になる場所だけでなく, そもそも存在しない場所も考える.

$f'(x)$ はすべての x について存在する.

$f'(x) = 0$ を解けば, $12x(x^2 - 4x + 3) = 0$ なので $12x(x - 1)(x - 3) = 0$, すなわち $x = 0, 1, 3$.

ここからは表を作る作業である。枠をがちがちに書く必要はない。

(3) それを小さい方から順次並べていく。定義域の両端がある場合も記入すること。

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$		0		0		0	
$f(x)$							

(4) 並べた数の間の $f'(x)$ の符号を調べて記入する。

$f'(x)$ が連続関数であれば、間の数を 1 つ代入してみればよい。

+ と - がいつも交互に来るとは限らないので、注意して調べること。

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$		-		+		-	
$f(x)$							

(5) 増減を入れる. それぞれ $f(x)$ に記入する.

$f'(x)$ が $+$ のところは増加だから $\nearrow$, $f'(x)$ が $-$ のところは減少だから $\searrow$.

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(6) 極大極小の判定

減少 ($\searrow$) から増加 ($\nearrow$) に変わっているところが極小

増加 ($\nearrow$) から減少 ($\searrow$) に変わっているところが極大

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(7) 値を求め、答えをまとめればよい.

$$x = 0 \text{ (極小となる)} \quad f(0) = 8.$$

$$x = 1 \text{ (極大となる)} \quad f(1) = 3 - 16 + 18 + 8 = 29 - 16 = 13.$$

$$x = 3 \text{ (極小となる)} \quad f(3) = 243 - 432 + 162 + 8 = 413 - 432 = -19.$$

解答その1

極大値: 13 ($x = 1$ のとき).

極小値: 8 ($x = 0$ のとき), -19 ($x = 3$ のとき).

解答その2

$x = 0$ のとき極小値 8. $x = 1$ のとき極大値 13. $x = 3$ のとき極小値 -19 .

解答その3

極大値 $f(1) = 13$. 極小値 $f(0) = 8$, $f(3) = -19$.

極大値や極小値を答えるときに、値そのものだけでなく、どこでとる値なのかも明記する必要がある.

ちなみに, 完成した増減表は次のとおり.

x	...	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小 8	$\nearrow$	極大 13	$\searrow$	極小 -19	$\nearrow$

表にして増減がまとめられるというので, 1 変数関数の極大極小を調べる問題には増減表は適している.

2 階導関数を用いた判定法

増減表を書けば、なんとか極大極小を調べることができるが、増減表を書く作業が若干面倒である。

- $f'(x) = 0$ の解を小さい方から並べる
... $2 - \sqrt{3}$ と $\sqrt{2} - 1$ どっちが小さい???

$$2 - \sqrt{3} < \sqrt{2} - 1$$

- $f'(x)$ の符号を調べる
... $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ の符号を調べるのに、何を代入して確認するの??

そこで、もう少し楽に判定する方法を考えてみよう。

$f(x)$ は C^2 級とする. $f''(x)$ が連続とする!!

さて、極大というのは増加から減少に変わる場所であるが

$\Leftrightarrow f'(x)$ が $+$ から $-$ に変わる場所

$\Leftrightarrow f'(a) = 0$ で、 $f'(x)$ が減少している!!

$\Leftrightarrow f'(a) = 0$ で、 $f''(x) = \{f'(x)\}'$ が $-$

$\Leftrightarrow f'(a) = 0$ で、 $[f''(x) \text{ が連続だから}] f''(a) < 0$ がいえればいい?

2階導関数による極値判定法

$f(x)$ は C^2 級の関数 ($f''(x)$ が連続) とする.

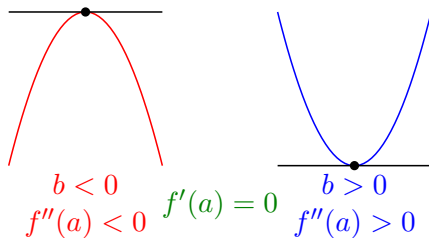
(1) $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極小.

(2) $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極大.

$f''(a) > 0$ のとき極大, と思いがちなのだが, $f(x) = bx^2$ と同じように

● $b > 0$ のとき下に凸 $\Rightarrow$ 極小 ● $b < 0$ のとき上に凸 $\Rightarrow$ 極大

$f''(0) = 2b$ であることと組み合わせて理解してほしい.



2 階導関数を用いた極値判定法の証明

$f(x)$ に対してテイラーの定理を用いると,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2.$$

仮定から $f'(a) = 0$. また, $f''(x)$ は連続だから, x が a に十分近いとき, $f''(c_x)$ の符号と $f''(a)$ の符号は同じといえる.

(1) $f''(a) > 0$ のとき, $f''(c_x) > 0$ であるから, $x \neq a$ が a に十分近いとき,

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2 > f(a).$$

これは $x = a$ が (狭義の) 極小であることを意味する式である.

(2) $f''(a) < 0$ のとき, $f''(c_x) < 0$ であるから, $x \neq a$ が a に十分近いとき,

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2 < f(a).$$

これは $x = a$ が (狭義の) 極大であることを意味する式である.

例 12.4. $f(x) = 3x^5 - 35x^3 + 45x^2$ の極大・極小を調べなさい.

$f(x)$ は多項式だからもちろん C^2 級である.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 105x^2 + 90x = 15x(x^3 - 7x + 6) \\ &= 15x(x-1)(x^2 + x - 6) = 15x(x-1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

だから, $f'(x) = 0$ の解は $x = 0, 1, -3, 2$.

$f''(x) = 60x^3 - 210x + 90$ だから $f''(0) = 90 > 0$, $f''(1) = -60 < 0$,
 $f''(-3) = -900 < 0$, $f''(2) = 150 > 0$.

$f(0) = 0$, $f(1) = 13$, $f(-3) = 621$, $f(2) = -4$ である.

極小値は $f(0) = 0$ および $f(2) = -4$.

極大値は $f(-3) = 621$ および $f(1) = 13$.

2 階導関数を用いた判定法は一般化できる.

$f(x)$ は C^n 級であり, $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ とする.

- (1) n が偶数で, $f^{(n)}(a) > 0$ であれば, $x = a$ で極小.
- (2) n が偶数で, $f^{(n)}(a) < 0$ であれば, $x = a$ で極大.
- (3) n が奇数ならば, $x = a$ で極値をとらない (極大・極小どちらでもない).

証明は 2 階導関数の場合と同じくテイラー展開を用いて証明される.
また, $y = cx^n$ の $x = 0$ での振る舞いを考える必要がある.

- n が奇数のとき: 単調増加 ($c > 0$), 単調減少 ($c < 0$) であり, 0 の前後で符号が変わる.
- n が偶数のとき: $c > 0$ のとき, $x = 0$ で最小なので符号は $+$, $c < 0$ のとき, $x = 0$ で最大なので符号は $-$.