微分積分1(微分) 自習スライド (Part 8)
高階導関数

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

高階導関数 (高次導関数)

そもそも, 導関数というのは $y = f(x)$ という関数から新たに決まる対応

$$a \mapsto f'(a) \ (f'(a) \text{ は } x = a \text{ での微分係数})$$

のことである.

導関数を $f'(x)$ や y' と表すほかに, 次のような書き方がある.

$$\frac{df}{dx}(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \dot{f}(x), \quad \dot{y}, \quad Dy.$$

$f'(x)$ も関数なわけだから, その導関数を考えることはなんの不自然なことはない! (計算は面倒になるだろうが •••)

関数 $f(x)$ を微分したものを導関数といい, $f'(x)$ や $\dfrac{df}{dx}$ などと表すが,

- $f'(x)$ を微分したものを (微分が 2 回目ということで)

2 階導関数 または 第 2 次導関数 といい, $f''(x)$ や $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ などと表す.

$$\{f'(x)\}' = f''(x), \quad \frac{d\frac{df}{dx}}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D(Df) = D^2 f.$$

- $f''(x)$ を微分したものを (微分が 3 回目ということで)

3 階導関数 または 第 3 次導関数 といい, $f'''(x)$ や $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$ と表す.

● 一般に, $f(x)$ を n 回だけ微分したものを
n 階導関数 または 第 n 次導関数 といい, $f^{(n)}(x)$ や $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ と表す.

$'$ の個数をいちいち数えるのが面倒なので,
最初から $'$ をつける個数を (n) と書き表していると思ってほしい.

$f'''''''''''''''''''''''''''''''''''(x) \Leftarrow$ これ $'$ は何個あるかな??

33 個なので $f^{(33)}(x)$ と同じ!!

特に, $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$ である.

ちなみに, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続となるような
(微分する前の) 関数 $f(x)$ は C^n 級であるという.

何回も微分できて, ずっと連続であるような
関数 $f(x)$ は C^∞ 級であるという.

多項式や $\sin x$, $\cos x$, e^x などは C^∞ 級の関数である.

例 8.1. $f(x) = x^3$ **の高階導関数.**

$f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f''''(x) = 0.$

例 8.2. $f(x) = e^x$ **の高階導関数.**

$f'(x) = e^x = f(x)$ なので $f^{(n)}(x) = e^x$.

例 8.3. $f(x) = e^{-x}$ **の高階導関数.**

$f'(x) = -e^{-x} = -f(x),\ f''(x) = e^{-x} = f(x)$ なので

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-x} & n \text{ は偶数}, \\ -e^{-x} & n \text{ は奇数}. \end{cases}$$

一般に $(e^{ax})^{(n)} = a^n\, e^{ax}$ となることがわかる.
(ちゃんと示すのであれば数学的帰納法を使う必要がある).

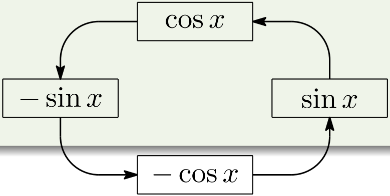
例 8.4. $\sin x$, $\cos x$ の高階導関数

順次微分していくと

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x \to \cos x \to \cdots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x & n = 4k, \\ \cos x & n = 4k+1, \\ -\sin x & n = 4k+2, \\ -\cos x & n = 4k+3 \end{cases} \quad (\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x & n = 4k, \\ -\sin x & n = 4k+1, \\ -\cos x & n = 4k+2, \\ \sin x & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \qquad = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$



例 8.5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の高階導関数.

順次微分していくと

$$x^{-1} \to -x^{-2} \to 2\,x^{-3} \to -6\,x^{-4} \to 24\,x^{-5} \to -120\,x^{-6} \to \cdots$$

これから $f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-n-1}$ と推測される.

実際にこれで正しいが, 数学的帰納法を使ってちゃんと示す必要がある.

高階導関数は順次微分していくほかに求める方法はない!

例 8.6. $y = e^{x^2}$ の 3 次導関数.

合成関数の微分法と積の微分法を用いて計算する.

$$y' = e^{x^2}\,(x^2)' = 2x\,e^{x^2},$$

$$y'' = (2x)'\,e^{x^2} + 2x\,\boxed{(e^{x^2})'} = 2\,e^{x^2} + 2x\,\underbrace{\boxed{2x\,e^{x^2}}}_{y'\text{ の計算と同じ}} = (4x^2+2)\,e^{x^2},$$

$$\begin{aligned} y''' &= (4x^2+2)'\,e^{x^2} + (4x^2+2)\,\boxed{(e^{x^2})'} = 8x\,e^{x^2} + (4x^2+2)\,\boxed{2x\,e^{x^2}} \\ &= (8x + 8x^3 + 4x)\,e^{x^2} = (8x^3+12x)\,e^{x^2} = 4x\,(2x^2+3)\,e^{x^2}. \end{aligned}$$

以上から, $y''' = 4x\,(2x^2+3)\,e^{x^2}$.

ライプニッツの公式 (Leibniz)

今度は, 高階導関数を求めるときによく出てくる **ライプニッツの公式** を紹介する. まず, 積の微分法を思い出そう

$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

これをもう 1 回微分すると

$$\begin{aligned}
&\{f(x)\,g(x)\}'' \\
&= \{f'(x)\,g(x)\}' + \{f(x)\,g'(x)\}' \\
&= \{f'(x)\}'\,g(x) + f'(x)\,\{g(x)\}' + \{f(x)\}'\,g'(x) + f(x)\,\{g'(x)\}' \\
&= f''(x)\,g(x) + f'(x)\,g'(x) + f'(x)\,g'(x) + f(x)\,g''(x) \\
&= f''(x)\,g(x) + 2\,f'(x)\,g'(x) + f(x)\,g''(x).
\end{aligned}$$

この後も次々に微分していくと, 次のような図が出来上がる.

$f(x)g(x)$ ← 微分 0 回

$\boxed{1}$

$f'(x)g(x) \quad f(x)g'(x)$ ← 微分 1 回

$\boxed{1} \quad \boxed{1}$

$f''(x)g(x) \quad f'(x)g'(x) \quad f(x)g''(x)$ ← 微分 2 回

$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1}$

$f'''(x)g(x) \quad f''(x)g'(x) \quad f'(x)g''(x) \quad f(x)g'''(x)$

$\boxed{1} \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \boxed{1}$

$f^{(4)}(x)g(x) \quad f'''(x)g'(x) \quad f''(x)g''(x) \quad f'(x)g'''(x) \quad f(x)g^{(4)}(x)$

$\boxed{1} \quad \boxed{4} \quad \boxed{6} \quad \boxed{4} \quad \boxed{1}$

$f^{(5)}(x)g(x) \quad f^{(4)}(x)g'(x) \quad f'''(x)g''(x) \quad f''(x)g'''(x) \quad f'(x)g^{(4)}(x) \quad f(x)g^{(5)}(x)$

$\boxed{1} \quad \boxed{5} \quad \boxed{10} \quad \boxed{10} \quad \boxed{5} \quad \boxed{1}$

出てくる数を見ると, パスカルの三角形に出てくるものと同じ!

上から 0 段, 1 段, 2 段, $\cdots$, n 段, $\cdots$,

左から 0 番, 1 番, 2 番, $\cdots$, r 番, $\cdots$,

このときに出てくる数は 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ である.

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,(r-1)\cdots 1}.
$$

以上から,

$$
\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, f^{(n-r)}(x)\, g^{(r)}(x).
$$

これがライプニッツの公式 である.

ちゃんと証明するなら数学的帰納法を用いる必要があるが,
ここではやめておく.

次の例は, $y^{(n)} = (a_n\,x^2 + b_n\,x + c_n)\,e^{3x}$ だと考えて漸化式を作って求める方法もあるが, 一発で計算で済ませられるのがライプニッツの公式である.

例 8.7. $y = x^2 e^{3x}$ の n 次導関数.

まず, x^2 と e^{3x} の高階導関数を求める.

$$\begin{array}{llll} (x^2)^{(0)} = x^2 & (x^2)^{(1)} = 2x & (x^2)^{(2)} = 2 & (x^2)^{(r)} = 0 \ (r \geqq 3) \\ (e^{3x})^{(0)} = e^{3x} & (e^{3x})^{(1)} = 3\,e^{3x} & (e^{3x})^{(2)} = 9\,e^{3x} & (e^{3x})^{(r)} = 3^r\,e^{3x} \end{array}$$

ここで，ライプニッツの公式から，

$$y^{(n)} = (x^2\,e^{3x})^{(n)}$$
$$= {}_n\mathrm{C}_0\,(x^2)^{(0)}\,(e^{3x})^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1\,(x^2)^{(1)}\,(e^{3x})^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2\,(x^2)^{(2)}\,(e^{3x})^{(n-2)}$$
$$+ \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\,(x^2)^{(n-1)}\,(e^{3x})^{(1)} + {}_n\mathrm{C}_n\,(x^2)^{(n)}\,(e^{3x})^{(0)}.$$

各高階導関数の計算結果を代入すれば，

$$y^{(n)} = (x^2\,e^{3x})^{(n)}$$
$$= x^2 \times 3^n\,e^{3x} + \frac{n}{1} \times 2x \times 3^{n-1}\,e^{3x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \times 2 \times 3^{n-2}e^{3x}$$
$$+ 0 + \cdots + 0 + 0$$
$$= e^{3x}\left[3^n\,x^2 + 2\,n\,3^{n-1}x + n\,(n-1)\,3^{n-2}\right]$$
$$= 3^{n-2}\,e^{3x}\,[9\,x^2 + 6\,n\,x + n\,(n-1)].$$

例 8.8. $y = e^{-x} \sin 2x$ の 3 次導関数.

まず,

$$(e^{-x})^{(0)} = e^{-x} \quad (e^{-x})^{(1)} = -e^{-x} \qquad (e^{-x})^{(2)} = e^{-x} \quad (e^{-x})^{(3)} = -e^{-x}$$

$$(\sin 2x)^{(0)} = \sin 2x \qquad (\sin 2x)^{(1)} = 2\ \cos 2x$$

$$(\sin 2x)^{(2)} = -4\ \sin 2x \qquad (\sin 2x)^{(3)} = -8\ \cos 2x$$

ここで, ライプニッツの公式から,

$$\begin{aligned}
y''' &= (e^{-x} \sin 2x)^{(3)} \\
&= {}_3\mathrm{C}_0\, (e^{-x})^{(3)}\, (\sin 2x)^{(0)} + {}_3\mathrm{C}_1\, (e^{-x})^{(2)}\, (\sin 2x)^{(1)} \\
&\quad + {}_3\mathrm{C}_2\, (e^{-x})^{(1)}\, (\sin 2x)^{(2)} + {}_3\mathrm{C}_3\, (e^{-x})^{(0)}\, (\sin 2x)^{(3)} \\
&= -e^{-x} \times \sin 2x + 3 \times e^{-x} \times 2\ \cos 2x \\
&\quad + 3 \times -e^{-x} \times -4\ \sin 2x + e^{-x} \times -8\ \cos 2x \\
&= e^{-x}\,(11\ \sin 2x - 2\ \cos 2x).
\end{aligned}$$

ライプニッツの公式は, 知っていれば確かに計算が楽になるものである.
忘れてしまったとしても着実に 1 回ずつ微分していけばいいだけなので,
無理をしてまで理解して覚えようと思わなくてもよい.

応用上, 3 次導関数だけを必要とすることは少ない. 導関数, 2 次導関数も
必要となってくることも多いから, 1 回ずつ微分した方がいいかも.

ちなみに, 先ほどの例は

$$
\begin{aligned}
y' &= (e^{-x})' (\sin 2x) + (e^{-x}) (\sin 2x)' = -e^{-x} \sin 2x + e^{-x}\, 2 \cos 2x \\
&= e^{-x} (-\sin 2x + 2 \cos 2x).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'' &= (e^{-x})' (-\sin 2x + 2 \cos 2x) + (e^{-x}) (-\sin 2x + 2 \cos 2x)' \\
&= -e^{-x} (-\sin 2x + 2 \cos 2x) + e^{-x} [-2 \cos 2x + 2 \times 2 (-\sin 2x)] \\
&= e^{-x} (\sin 2x - 2 \cos 2x - 2 \cos 2x - 4 \sin 2x) \\
&= e^{-x} (-3 \sin 2x - 4 \cos 2x).
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
y''' &= (e^{-x})' (-3 \sin 2x - 4 \cos 2x) + (e^{-x}) (-3 \sin 2x - 4 \cos 2x)' \\
&= -e^{-x} (-3 \sin 2x - 4 \cos 2x) + e^{-x} [-3 \times 2 \cos 2x - 4 \times 2 (-\sin 2x)] \\
&= e^{-x} (3 \sin 2x + 4 \cos 2x - 6 \cos 2x + 8 \sin 2x) \\
&= e^{-x} (11 \sin 2x - 2 \cos 2x).
\end{aligned}
$$