

微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 7)

逆三角関数

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

三角関数の逆関数を考える.

関数 $y = f(x)$ とは

1つのデータ x を与えたとき, 1つのデータ y を返してくれる仕組み!

これに対し, 逆の対応

データ y を与えたとき, データ x を返してくれる仕組み

を**逆関数**という.

もちろん, 何の条件もなければ逆関数が作れないこともある.

例 7.1. $y = x^2$ の逆関数

$y = x^2$ となる x は $x = \pm\sqrt{y}$ なので, $y = f(x) = x^2$ の逆関数は

$$\bullet f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \bullet f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

どっちにすればいいの??

必要に応じて定義域を変更することで, 逆関数が作れる.

連続関数の場合には, 次の事実が知られている.

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で狭義単調増加で, 値域が $\alpha \leq y \leq \beta$ の関数であれば, 逆関数 $f^{-1}(x)$ が $\alpha \leq x \leq \beta$ で定義できる.

$f(x)$ が**狭義単調増加**とは $x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) < f(x_2)$ となることをいう.

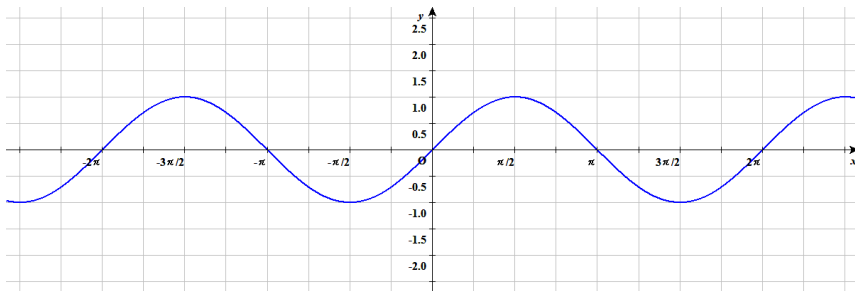
増加ではなく, **減少**の場合 [$f(x_1) > f(x_2)$] でも同様に成立する.

では、三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ についてその逆関数を作ってみよう.

例えば, $y = \sin x$ の逆関数を求めるために, x について解くと ...

- $y = 0$ の場合: $0 = \sin x$ だから $x = n\pi$ (n は整数)
- $y = \frac{1}{2}$ の場合: $\frac{1}{2} = \sin x$ だから $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ (n は整数)

三角関数は周期関数なので, 定義域を制限しないと逆関数は作れない!



(1) $f(x) = \sin x$. $y = \sin x$ は

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において狭義単調増加であり, $-1 \leq y \leq 1$ に値をとる.

したがって, 逆関数が存在する.

その逆関数を $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ や $\arcsin x$ と書き, **アークサイン** と読む.

C 言語をはじめとしたプログラミング言語では `asin` を用いることが多い.

値が 1 つだけということで $\text{Sin}^{-1}x$ や $\text{Arcsin}x$ と書かれることがある.

注意

$\sin^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$ のことではない! $\frac{1}{\sin^2 x}$ を $\sin^{-2} x$ と書かないで!

$\sin(\sin^{-1} x) = x$ は問題ない. $-1 \leq x \leq 1$ においてのみ成立している.

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ はまずい!

$\sin \pi = 0$ だから, $\sin^{-1}(\sin \pi) = \sin^{-1} 0 = 0$.

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ は $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ においてのみ成立する.

(2) $f(x) = \cos x$. $y = \cos x$ は

$0 \leq x \leq \pi$ において**狭義単調減少**であり, $-1 \leq y \leq 1$ に値をとる.

したがって, 逆関数が存在する.

その逆関数を $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ や $\arccos x$ と書き, **アークコサイン** と読む.

(3) $f(x) = \tan x$. $y = \tan x$ は

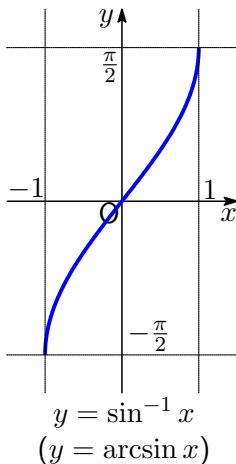
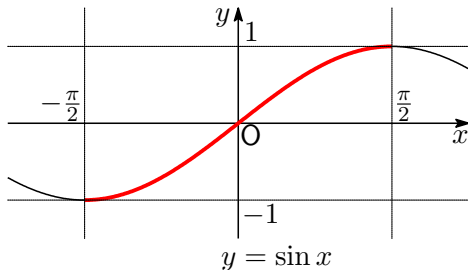
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において**狭義単調増加**であり, 実数全体に値をとる.

したがって, 逆関数が存在する.

※実数全体を $-\infty < y < +\infty$ または $\mathbb{R}$ とも書き表す.

その逆関数を $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ や $\arctan x$ と書き, **アークタンジェント** と読む.

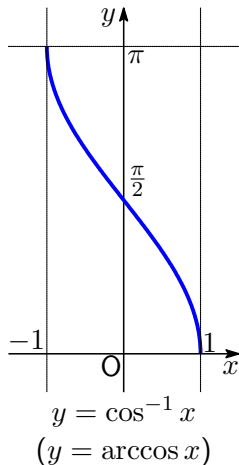
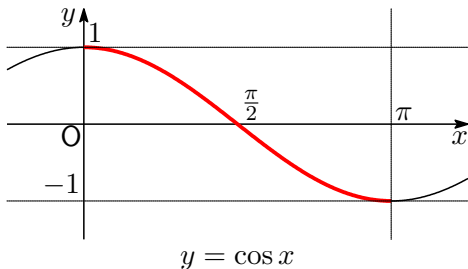
$y = \sin x$ と $y = \sin^{-1} x$ のグラフを見比べると...



$$\sin^{-1}(\sin x) = x \text{ が成立するのは } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

★ 逆関数のグラフは、元の関数のグラフと $y = x$ に関して対称なもの。

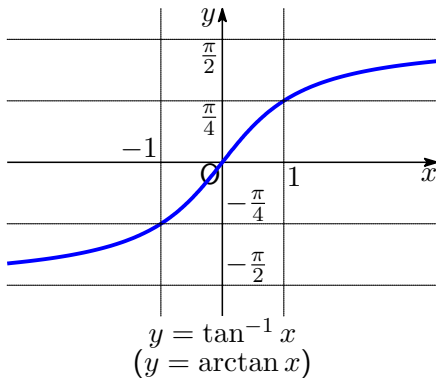
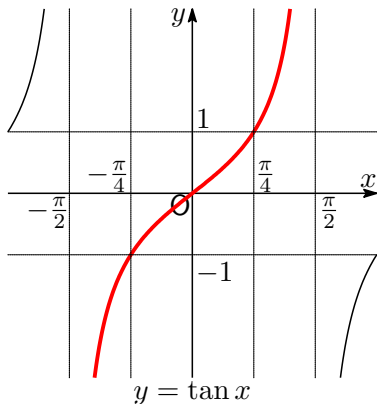
$y = \cos x$ と $y = \cos^{-1} x$ のグラフを見比べると...



$\cos^{-1}(\cos x) = x$ が成立するのは $0 \leq x \leq \pi$.

★ 逆関数のグラフは、元の関数のグラフと $y = x$ に関して対称なもの.

$y = \tan x$ と $y = \tan^{-1} x$ のグラフを見比べると...



$\tan^{-1}(\tan x) = x$ が成立するのは $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

★ 逆関数のグラフは、元の関数のグラフと $y = x$ に関して対称なもの.

三角関数の値を思い出すと、次のような表が完成する.

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^{-1}$ (arcsin)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}$ (arccos)	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\tan^{-1}$ (arctan)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

ただし, $\tan^{-1} \infty$ は $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$ のことと解釈する.

先ほどの表を見ればわかるが、次の性質が知られている.

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0. \end{cases}$$

例 7.2. $5 \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$, $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ だから,

$$5 \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 \times \frac{2}{3}\pi + 3 \times -\frac{1}{4}\pi = \frac{40 - 9}{12}\pi = \frac{31}{12}\pi.$$

逆三角関数の値の足し算だからといって、答えを $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に直そう、とは考えなくてよい.

逆三角関数の値で特に $\cos^{-1} x$ の値を勘違いする人が多いので注意しよう.

- $\cos^{-1} x$ は負の数になることはない.
- $\cos^{-1} 0 = 0$ ではなく $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$. また, $\cos^{-1} 1 = 0$.

例 7.3. $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$

$\tan^{-1} \frac{1}{2} = \alpha$, $\tan^{-1} \frac{1}{3} = \beta$ とおく. 求めるものは $\alpha + \beta$ である.

ここで, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ に注意する.

※ $\tan^{-1} x$ は単調増加な関数で $\tan^{-1} 0 = 0$, $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$.

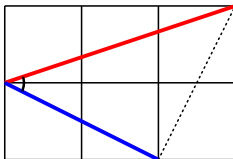
さて, $\tan$ の加法定理から,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \div \frac{5}{6} = 1.$$

$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ なので, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

$$\therefore \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

先ほどの例は, 次の図を考えていることと同じである.



例 7.4. $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$

$\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = \alpha$, $\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) = \beta$ とおく. 求めるものは $\alpha + \beta$ である.

ここで, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ に注意する.

※ $\cos^{-1} x$ は単調減少な関数で $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(-1) = \pi$.

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ と, $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ に注意すると

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

さて, $\sin, \cos$ の加法定理から,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0.\end{aligned}$$

$\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ **なので**, $\alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$.

$$\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{2}\pi.$$

今度は逆三角関数の導関数を求めたい。

ところで、逆関数というのは $f(f^{-1}(x)) = x$ を満たすものであるから、この両辺を x で微分すれば

$$f'(f^{-1}(x)) (f^{-1}(x))' = 1. \quad \therefore \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

厳密な証明は $f(x)$ および $f^{-1}(x)$ が狭義単調増加 (減少) であったことを利用して、合成関数の微分法 (高校流の証明) のごとく示される。

$$\begin{aligned} \{f^{-1}(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x+h)) - f(f^{-1}(x))} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(f^{-1}(x) + k) - f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \end{aligned}$$

$k = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)$ は $h \neq 0$ である限り $k \neq 0$ であり、 $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ であることに注意する。

逆関数の微分公式が問題ないか確認しておこう.

例 7.5.

$f(x) = x^2$ (定義域 $x \geq 0$) の逆関数は $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である.

$$f'(x) = 2x, \quad \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

したがって, $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \{f^{-1}(x)\}'.$

例 7.6.

$f(x) = a^x$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_a x$ である.

$$f'(x) = a^x \log a, \quad \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{x \log a}.$$

したがって, $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{f^{-1}(x)} \log a} = \frac{1}{x \log a} = \{f^{-1}(x)\}'.$

逆三角関数の導関数

(1) $y = \sin^{-1} x$. $f(x) = \sin x$ に逆関数の微分公式を使えば,

$$y' = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}.$$

ここで, $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ だから $\cos(\sin^{-1} x) \geq 0$ である.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$. 以上から,

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$\sin(\sin^{-1} x) = x$ に注意! まとめると, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$\sin y = x$ の両辺を x で微分して, 次のように考えてもよい.

$$\cos y y' = 1, \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(2) $y = \cos^{-1} x$. $f(x) = \cos x$ に逆関数の微分公式を使えば,

$$y' = \frac{1}{-\sin(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\cos^{-1} x)}.$$

ここで, $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ だから $\sin(\cos^{-1} x) \geq 0$ である.
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. 以上から,

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$\cos(\cos^{-1} x) = x$ に注意! まとめて, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

$\cos y = x$ の両辺を x で微分して, 次のように考えてもよい.

$$-\sin y y' = 1, \quad y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(3) $y = \tan^{-1} x$. $f(x) = \tan x$ に対し,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

逆関数の微分公式を使えば,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \tan^2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \quad \tan(\tan^{-1} x) = x \text{ に注意!} \end{aligned}$$

$\tan y = x$ の両辺を x で微分して, 次のように考えてもよい.

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1, \quad 1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}, \quad y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

さすがに毎回逆関数の微分法を用いて計算するのも大変なので、逆三角関数の導関数はこれで理解しておく方がいいと思われる。

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

では、逆三角関数が入った関数の導関数を求める計算を練習してみよう。

例 7.7. $y = 5 \sin^{-1} x - 3 \cos^{-1} x$ の導関数.

$$y' = 5(\sin^{-1} x)' - 3(\cos^{-1} x)' = 5 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 3 \times -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 7.8. $y = \tan^{-1} x^2$ の導関数.

合成関数の微分法より $y = \tan^{-1} u$, $u = x^2$ だから

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \times 2x = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}.$$

おまけ: 双曲線関数と逆双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{ハイパボリックサインと読む})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{ハイパボリックコサインと読む})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{ハイパボリックタンジェントと読む})$$

を双曲線関数という. これらは三角関数と類似の性質がある.

微分した結果は

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh x, & (\cosh x)' &= \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \sinh x, \\(\tanh x)' &= \frac{\{e^x - (-e^{-x})\}(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\{e^x + (-e^{-x})\}}{(e^x + e^{-x})^2} \\&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\&= \frac{\{(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})\}\{(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\}}{(e^x + e^{-x})^2} \\&= \frac{2e^x 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$

また, 双曲線関数の基本公式は

$$\begin{aligned} & \cosh^2 x - \sinh^2 x \\ = & \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \div \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x.$$

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2 x &= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2e^x 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}. \end{aligned}$$

また、加法定理は

$$\begin{aligned} & \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} + \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \sinh(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} + \frac{e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \cosh(x + y) \end{aligned}$$

これより

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\begin{aligned}\tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} \\ &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.\end{aligned}$$

さて、値の取りうる範囲だが、

$y = \sinh x$ は $-\infty < y < \infty$ (実数全体) である.

$y = \cosh x$ は $y \geq 1$ である.

$y = \tanh x$ は $-1 < y < 1$ である. 特に,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

$f(x) = \sinh x$, $f(x) = \tanh x$ は実数全体で単調増加,
 $f(x) = \cosh x$ は $x \geq 0$ で単調増加である.

そのため,

- $f(x) = \sinh x$ は実数全体から実数全体への単調増加の関数
- $f(x) = \cosh x$ は $x \geq 0$ から $y \geq 1$ への単調増加の関数
- $f(x) = \tanh x$ は実数全体から $-1 < y < 1$ への単調増加の関数

なので, それぞれ次のような逆関数を持つことがいえる.

- 実数全体から実数全体への単調増加な $y = \sinh x$ の逆関数,
- $x \geq 1$ から $y \geq 0$ への単調増加な $y = \cosh x$ の逆関数,
- $-1 < x < 1$ から実数全体への単調増加な $y = \tanh x$ の逆関数.

その逆関数を具体的に求めてみよう.

(1) $f(x) = \sinh x$ の逆関数

$\sinh x = y$ を x について解けばよい.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y. \quad (e^x)^2 - 1 = 2y e^x. \quad (e^x)^2 - 2y e^x - 1 = 0.$$

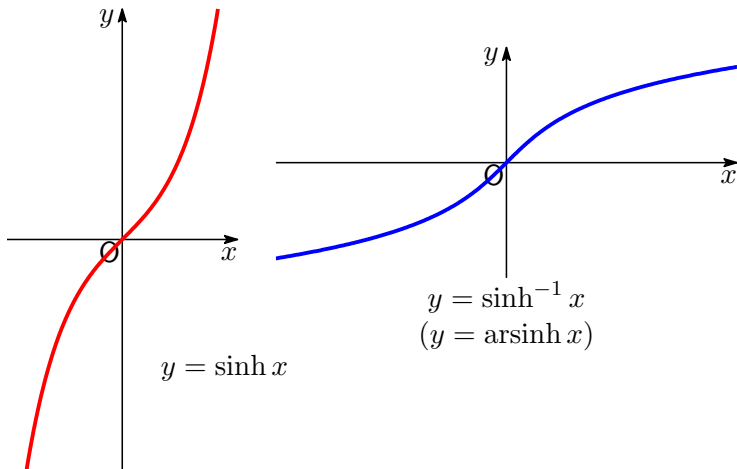
$$\therefore e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

$e^x > 0$ であるので,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}. \quad \therefore x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

$f(x) = \sinh x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を $\sinh^{-1} x$ や $\operatorname{arsinh} x$ と書き, **エリアハイパボリックサイン** という.

$y = \sinh x$ と $y = \sinh^{-1} x$ のグラフを見比べると...



(2) $f(x) = \cosh x$ の逆関数

$\cosh x = y$ を x について解けばよい.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y. \quad (e^x)^2 + 1 = 2y e^x. \quad (e^x)^2 - 2y e^x + 1 = 0.$$

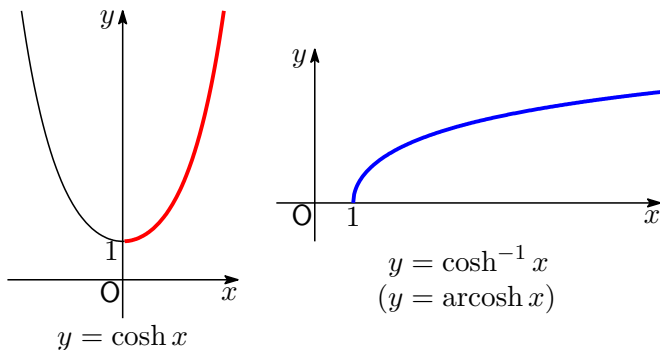
$$\therefore e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

$x \geq 0$ だから $e^x \geq 1$ であるので,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}. \quad \therefore x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

$f(x) = \cosh x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ を $\cosh^{-1} x$ や $\operatorname{arcosh} x$ と書き, **エリアハイパボリックコサイン**という.

$y = \cosh x$ と $y = \cosh^{-1} x$ のグラフを見比べると...



ar やエリアは面積を指す area のことである.

どこの面積なのかというのを説明するのは難しいので省略する.

(3) $f(x) = \tanh x$ の逆関数

$\tanh x = y$ を x について解けばよい.

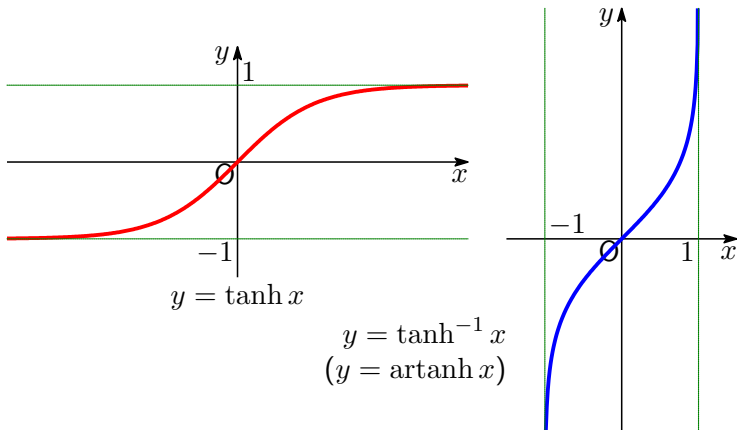
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y. \quad \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y. \quad e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1).$$

$$e^{2x} - y e^{2x} = y + 1. \quad e^{2x} (1 - y) = 1 + y.$$

$$e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}. \quad \therefore x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y}.$$

$f(x) = \tanh x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}$ を $\tanh^{-1} x$ や $\operatorname{artanh} x$ と書き, **エリアハイパボリックタンジェント** という.

$y = \tanh x$ と $y = \tanh^{-1} x$ のグラフを見比べると...



これら逆双曲線関数の導関数を考えることができる.

(1) $y = \sinh x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.\end{aligned}$$

(2) $y = \cosh x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ の導関数

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.\end{aligned}$$

(3) $y = \tanh x$ の逆関数 $f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ の導関数

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \frac{1}{2} \frac{(1+x)'}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1-x) + (1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

逆関数の微分法を用いても示せるが、それは各自にお任せする。