微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 5)
三角関数の微分法

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

今回は

三角関数の微分公式

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

この公式を証明し，実際に使ってみよう!

重要な極限値

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

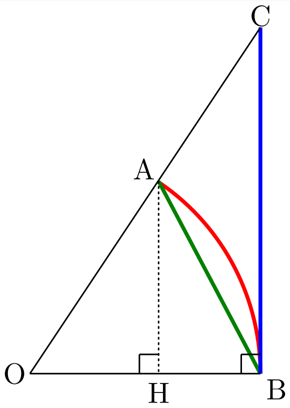
証明のために右のような図を考える.

$\angle \mathrm{AOB} = \theta > 0.$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1.$

中心 O 半径 1 の円を描く.

B での接線と直線 OA の交点を C.



前ページの図において, 図形の面積の大小関係を考えると

$$\text{三角形 OAB} < \text{扇形 OAB} < \text{三角形 OCB}$$

ところで, 三角比の性質から, $\mathrm{AH} = \sin\theta$, $\mathrm{CB} = \tan\theta$.

$$\begin{aligned}
\text{三角形 OAB} &= \frac{1}{2} \times 1 \times \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta, \\
\text{扇形 OAB} &= \frac{1}{2} \times 1 \times (1\theta) = \frac{1}{2}\theta, \\
\text{三角形 OCB} &= \frac{1}{2} \times 1 \times \tan\theta = \frac{1}{2}\tan\theta.
\end{aligned}$$

※扇型の面積は $\frac{1}{2} \times$ 半径 $\times$ 弧の長さ で計算できる.

なお, 弧の長さは, 円 1 周分が $2\pi \times$ 半径 であることと, 円の中心角は 2π (度数法だと $360°$) であることより 半径 $\times$ 中心角 (弧度法) に注意する.

ゆえに, $\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$

これから, $\sin\theta < \theta < \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので

$$\frac{\sin\theta}{\theta} < 1 < \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}. \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

さて, 最左辺 $\cos\theta$, 最右辺 1 について,

$$\lim_{\theta\to+0} \cos\theta = \cos 0 = 1, \quad \lim_{\theta\to+0} 1 = 1.$$

したがって, はさみうちの原理から, 中にある $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ の極限値がわかり,

$$\lim_{\theta\to+0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

ところで, $\theta \to -0$ の場合については, $-\theta \to +0$ であるので,

$$\lim_{\theta\to -0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to -0}\frac{-\sin\theta}{-\theta} = \lim_{\theta\to -0}\frac{\sin(-\theta)}{(-\theta)} = \lim_{-\theta\to +0}\frac{\sin(-\theta)}{(-\theta)} = 1.$$

右極限と左極限が同じ 1 であるので, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$

なお,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta\,(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\,(1+\cos\theta)}$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta\,(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 1\times\frac{0}{1+1} = 0.$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0.$$

三角関数の微分公式

準備が整ったので, 三角関数の微分公式を示すことにしよう.

微分公式を示すにあたって, 以下の三角関数の性質は重要である.

基本公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

加法定理

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y, \\
\cos(x+y) &= \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y, \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}.
\end{aligned}$$

テキストにあるような, 和を積にする公式は使わない.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

(1) $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\theta \to 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x \, \cos\theta + \cos x \, \sin\theta - \sin x}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x\,(\cos\theta - 1) + \cos x \, \sin\theta}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \left(-\sin x \times \frac{1 - \cos\theta}{\theta} + \cos x \times \frac{\sin\theta}{\theta} \right) \\
&= -\sin x \times \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} + \cos x \times \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= -\sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \cos x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\theta \to 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos x \, \cos\theta - \sin x \, \sin\theta - \cos x}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos x \, (\cos\theta - 1) - \sin x \, \sin\theta}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \left(-\cos x \times \frac{1 - \cos\theta}{\theta} - \sin x \times \frac{\sin\theta}{\theta} \right) \\
&= -\cos x \times \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} - \sin x \times \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= -\cos x \times 0 - \sin x \times 1 = -\sin x.
\end{aligned}
$$

または, 次のように合成関数の微分法と $\sin x$ の微分法とを組み合わせて示すこともできる.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x\ \cos\frac{\pi}{2} + \cos x\ \sin\frac{\pi}{2} = \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$$

であり, 合成関数の微分法から,

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \times \left(x+\frac{\pi}{2}\right)' \\ &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \times 1 \\ &= \cos x\ \cos\frac{\pi}{2} - \sin x\ \sin\frac{\pi}{2} \\ &= \cos x \times 0 - \sin x \times 1 = -\sin x.\end{aligned}$$

(3) $f(x) = \tan x$. 商の微分法を用いると,

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(= 1 + \tan^2 x\right).
\end{aligned}
$$

別の方法もあるが, それはおまけに載せた.

例 5.1. $y = x^3 \sin x$ の導関数.

積の微分法より

$$y' = (x^3)' (\sin x) + (x^3) (\sin x)' = 3\,x^2\, \sin x + x^3\, \cos x.$$

例 5.2. $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$ の導関数.

商の微分法より

$$y' = \frac{(x^2)' (\cos x) - (x^2) (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2\,x\, \cos x - x^2\, (-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{2\,x\, \cos x + x^2\, \sin x}{\cos^2 x}.$$

例 5.3. $y = \sin^5 x$ の導関数.

合成関数の微分法より, $y = u^5$, $u = \sin x$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5\,u^4 \times \cos x = 5\,\sin^4 x\,\cos x.$$

例 5.4. $y = \tan 3x^2$ の導関数.

合成関数の微分法より, $y = \tan u$, $u = 3x^2$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \times 6x = \frac{6\,x}{\cos^2 3x^2}.$$

くれぐれも $\cos^2 3x^2$ を $\cos 3x^4$ や $\cos{(3x^2)}^2$ と勘違いしないように!

おまけ: $\tan x$ の導関数の別の求め方

$\tan x$ の導関数は $\tan$ の加法定理から直接示すことができる.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\theta\to 0} \frac{f(x+\theta)-f(x)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{\tan x+\tan\theta}{1-\tan x\ \tan\theta}-\tan x}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan x+\tan\theta-\tan x\,(1-\tan x\ \tan\theta)}{\theta\,(1-\tan x\ \tan\theta)} \\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan x+\tan\theta-\tan x+\tan^2 x\ \tan\theta}{\theta\,(1-\tan x\ \tan\theta)} \\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta\,(1+\tan^2 x)}{\theta\,(1-\tan x\ \tan\theta)} \\
&= \lim_{\theta\to 0}(1+\tan^2 x)\times \frac{\tan\theta}{\theta} \times \frac{1}{1-\tan x\ \tan\theta} \\
&= (1+\tan^2 x)\times 1\times \frac{1}{1-\tan x\times 0} = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$ に注意する.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{1}{\cos\theta} = 1 \times \frac{1}{1} = 1.$$