

微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 4)

合成関数の微分法

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) g'(x).$$

この公式を証明し、実際に使ってみよう!

公式について、くれぐれも、

$$\{f(g(x))\}' = f'(g'(x))$$

とすることがないように!!

微分可能性について注意しておこう.

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能の言い換え

次を満たす $x = a$ で連続な関数 $f_1(x)$ が存在する.

$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x - a).$$

なお, $f_1(a) = f'(a)$ である.

この事実をはじめに証明しておこう. まず, 次に注意する.

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad x \neq a.$$

もし, $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば, $f_1(a) = f'(a)$ と定めれば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = f_1(a).$$

$x = a$ で連続となるような $f_1(x)$ が作れた.

一方, $x = a$ で連続となるような $f_1(x)$ があれば,

$$f_1(a) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

右辺の極限值が存在するということだが, それは微分係数 $f'(a)$ である.
微分係数が求められたから, $x = a$ で微分可能である.

※ 連続性について注意: 連続関数同士の合成関数は連続関数になる.

合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) g'(x).$$

くれぐれも $f'(g'(x))$ や $f'(g(x))$ ではないので注意すること.

高校では次のような証明だったかもしれない. $F(x) = f(g(x))$ について

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{\substack{g(x+h) \rightarrow g(x) \\ g(x) \text{ は連続}}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x)) g'(x). \end{aligned}$$

実は, この証明法は問題点がある! $g(x+h) - g(x) = 0$ となる可能性!

では、どうすればよいのか: **割るのをやめればよい!**
(微分可能性を言い換えたものは割り算を使っていない!)

合成関数の微分法の証明

$g(x)$ は $x = a$ で微分可能, $f(x)$ は $x = b = g(a)$ で微分可能とする.
このとき, 次を満たすような $x = a$ で連続な関数 $g_1(x)$,
 $x = b$ で連続な関数 $f_1(x)$ が存在する.

$$g(x) = g(a) + g_1(x)(x - a), \quad f(x) = f(b) + f_1(x)(x - b).$$

このとき,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(b) + f_1(g(x)) (g(x) - b) \\ &= f(g(a)) + f_1(g(x)) (g(x) - g(a)) \\ &= f(g(a)) + f_1(g(x)) (g_1(x) (x - a)) \\ &= f(g(a)) + f_1(g(x)) g_1(x) (x - a). \end{aligned}$$

ここで, $g(x) \rightarrow g(a) = b$ ($x \rightarrow a$) であるから, $f_1(g(x)) g_1(x)$ は $x = a$ で連続である.

ゆえに, $f(g(x))$ は $x = a$ で微分可能である.

さらに, その微分係数は

$$f_1(g(a)) g_1(a) = f'(g(a)) g'(a).$$

合成関数の微分法だが, $y = f(g(x))$ を $y = f(u)$, $u = g(x)$ とみなすと,

$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}' = f'(g(x)) g'(x) = f'(u) g'(x) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

$\frac{dA}{dB}$ というのは A を B という文字について微分する, と考えてよい.

合成関数の微分法を缶詰微分だとかマトリョーシカ微分だとか呼ぶ人もいるそう.

缶を開けて, 中を取り出して, また缶を開けて, 中を取り出して ...
(缶を開けるのが微分すること)

中身開けて, 中を取り出して, また中身開けて, 中を取り出して ...
(中身開けるのが微分すること)

合成関数の微分法はよく使うものなので、たくさん練習しよう。

例 4.1. $f(x) = (3x - 5)^7$ の導関数.

$y = u^7$, $u = 3x - 5$ だから,

$$\frac{dy}{du} = 7u^6, \quad \frac{du}{dx} = 3.$$

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 7u^6 \times 3 = 21u^6 = 21(3x - 5)^6.$$

なお、以上の計算を次のように略記してもよい。

$$f'(x) = 7(3x - 5)^{7-1}(3x - 5)' = 7(3x - 5)^6 \times 3 = 21(3x - 5)^6.$$

例 4.2. $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 6x)^5$ の導関数.

$y = u^5$, $u = x^3 + 3x^2 - 6x$ だから,

$$\frac{dy}{du} = 5u^4, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x - 6 = 3(x^2 + 2x - 2).$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 5u^4 \times 3(x^2 + 2x - 2) \\ &= 15(x^3 + 3x^2 - 6x)^4(x^2 + 2x - 2). \end{aligned}$$

例 4.3. $f(x) = \frac{9}{(3x^4 - 5x^2 + 7)^8}$ の導関数.

$$y = \frac{9}{u^8} = 9u^{-8}, \quad u = 3x^4 - 5x^2 + 7 \text{ だから,}$$

$$\frac{dy}{du} = 9 \times (-8) u^{-9} = -\frac{72}{u^9}, \quad \frac{du}{dx} = 12x^3 - 10x = 2x(6x^2 - 5).$$

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{72}{u^9} \times 2x(6x^2 - 5) = -\frac{144x(6x^2 - 5)}{(3x^4 - 5x^2 + 7)^9}.$$

例 4.4. $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 5}$ の導関数.

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}, \quad u = x^4 - 3x^2 + 5 \text{ だから,}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3).$$

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 2x(2x^2 - 3) = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 5}}.$$

合成関数の微分法と積や商の微分法が混ざったものも出てくるが、
1 つずつ丁寧に計算を進めていくことが大事である。

暗算でホイホイやろうと思わなくてもいい。

例 4.5. $f(x) = x^3\sqrt{x^2 - 1}$ の導関数.

$y = \sqrt{x^2 - 1}$ について $y = u^{\frac{1}{2}}$, $u = x^2 - 1$ だから,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times 2x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \sqrt{x^2 - 1} + x^3 (\sqrt{x^2 - 1})' \quad \leftarrow \text{積の微分法} \\ &= 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} + x^3 \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} + x^3 \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} 2x \\ &= 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} + x^4 (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

もし, もっと整理した形にしたければ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\sqrt{x^2-1} + x^4(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3x^2(x^2-1) + x^4}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3x^4 - 3x^2 + x^4}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{4x^4 - 3x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2(4x^2 - 3)}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

今回, 合成関数の微分法を証明するのに, 微分可能性を言い換えたうえで行ったが, その方法を利用して積の微分法を証明してみよう.

積の微分法

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

微分可能性の言い換え

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能 $\Leftrightarrow$
 $f(x) = f(a) + f_1(x)(x - a)$ となる $x = a$ で連続な関数 $f_1(x)$ がある.

まず, $f(x), g(x)$ が $x = a$ で微分可能であることから

$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x - a), \quad g(x) = g(a) + g_1(x)(x - a),$$

となるような $x = a$ で連続な関数 $f_1(x), g_1(x)$ がある.

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) \\ &= [f(a) + f_1(x)(x - a)][g(a) + g_1(x)(x - a)] \\ &= f(a)g(a) + f_1(x)(x - a)g(a) + f(a)g_1(x)(x - a) \\ &+ f_1(x)(x - a)g_1(x)(x - a) \\ &= f(a)g(a) + [f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x - a)](x - a). \end{aligned}$$

連続関数の積は連続関数であるから,

$f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x - a)$ は $x = a$ で連続である.
よって, $F(x) = f(x)g(x)$ が $x = a$ で微分可能である.

さらに,

$$\begin{aligned} F'(a) &= [f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x-a)]_{x=a} \\ &= f_1(a)g(a) + f(a)g_1(a) + f_1(a)g_1(a)0 = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

微分可能性の定義を次のように書き表すことがある.

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能の別定義

次を満たす A と $f_1(x)$ がある.

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + f_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{x-a} = 0.$$

言うまでもなく, $f'(a) = A$ である.

この書き表し方と似たものが, 多変数関数の偏微分法で出てくる.