微分積分1(微分) 自習スライド (Part 2)

導関数の計算

鈴木 敏行

神奈川大学

2023年03月01日

http://t21suzuki.html.xdomain.jp/

多項式関数の微分法

3 次関数など, 一般に x の整式 (多項式) で表される関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

を**多項式関数**という．この微分法を考える．結果は

$$f'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2\, a_2 x + a_1.$$

微分法の線形性

$$F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow F'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

これは次のようにして示される.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - \alpha f(x) - \beta g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha[f(x+h) - f(x)] + \beta[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \beta \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \alpha f'(x) + \beta g'(x).
\end{aligned}$$

関数の和や定数倍をしてから微分するのと, 微分してから関数の和や定数倍をするのが同じということである. そこで, $f(x) = x^n$ の導関数を求めればできれば, 多項式関数の導関数も求められる.

$f(x) = x^n$ の導関数 ($n = 1, 2, \ldots$)

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ だから

$$x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}, \quad x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

これを一般化する.

ところで, $S = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}$ とすれば,

$$\begin{array}{rrl} & x\,S = & x^n + x^{n-1}\,y + \cdots + x\,y^{n-1} + \\ -) & y\,S = & x^{n-1}\,y + \cdots + x\,y^{n-1} + y^n \\ \hline & (x-y)\,S = & x^n \phantom{+ x^{n-1}\,y + \cdots + x\,y^{n-1}} - y^n \end{array}$$

したがって,

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = S = x^{n-1} + x^{n-2}\,y + \cdots + y^{n-1}.$$

S には項が n 個あることに注意する.

これを用いると,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x} \\
&\underset{S}{=} \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right] \\
&\qquad x \leftrightarrow x+h,\ y \leftrightarrow x \\
&= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}\,x + \cdots + x^{n-1}}_{\text{項が } n \text{ 個}} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

$$
(x^n)' = n\,x^{n-1}. \ (n = 1, 2, \cdots)
$$

$f(x) = c$ の導関数 ($x^0 = 1$ の導関数)

$f(x) = c$ (定数関数) のときは,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ の導関数

$$f'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \cdots + 2\, a_2\, x + a_1.$$

例 2.1. 関数 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 9x^2$ を微分しなさい.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3(x^4)' - 8(x^3)' + 9(x^2)' = 3 \times 4x^3 - 8 \times 3x^2 + 9 \times 2x \\
&= 12x^3 - 24x^2 + 18x = 6x(2x^2 - 4x + 3).
\end{aligned}
$$

因数分解した方がいいのか, については, $f'(x) = 0$ となる x を知りたいという状況でないのであれば, 無理して因数分解する必要はない.

ただし, 因数分解した方がきれいになるのであれば, した方がいいかもしれない. 問題集の解答は, 因数分解していることも多い.

因数分解は義務ではないので, 無理ならしなくてもいいだろう.

折角なので

もう少し, いろいろな関数の導関数を計算してみよう.

ここでは, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を求める.

これらをさらに一般化した $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ の導関数も求めた.

いずれにしても, 次が計算できればよい.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数

定義通りに計算すると，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x}{(x+h)x} - \frac{x+h}{x(x+h)} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} \times x(x+h)}{h \times x(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x\,x} = -\frac{1}{x^2}.$$

この手法を，賞の微分法で用いる．

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h}$$

$$\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{(x+h)^n x^n} - \frac{(x+h)^n}{x^n(x+h)^n} = \frac{x^n - (x+h)^n}{x^n(x+h)^n}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^n - (x+h)^n}{x^n(x+h)^n} \quad \times x^n(x+h)^n}{h \quad \times x^n(x+h)^n} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n - (x+h)^n}{hx^n(x+h)^n}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} \times \frac{-1}{x^n(x+h)^n}.$$

ここで，最初に考えた $S = \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ の計算を使うと，

前ページの式

$$\underset{S}{=} \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}] \times \frac{-1}{x^n(x+h)^n}$$

$$= [x^{n-1} + x^{n-2}\,x + \cdots + x^{n-1}] \times \frac{-1}{x^n\,x^n} = n\,x^{n-1} \times \frac{-1}{x^{2n}}$$

$$= n\,x^{n-1} \times (-1)x^{-2n} = -nx^{n-1-2n} = -n\,x^{-n-1}$$

$$= -n\,x^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

以上から，

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

$f(x)=\sqrt{x}$ の導関数

定義通りに計算すると,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\ \times(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\ \times(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ の導関数を求めてみよう.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{(x+h) - x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x+h})^n - (\sqrt[n]{x})^n} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt[n]{x+h})^{n-1} + (\sqrt[n]{x+h})^{n-2}(\sqrt[n]{x}) + \cdots + (\sqrt[n]{x})^{n-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{x-y}{x^n - y^n} = \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}}
$$

$$
x \leftrightarrow \sqrt[n]{x+h},\ y \leftrightarrow \sqrt[n]{x}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2}(\sqrt[n]{x}) + \cdots + (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.
\end{aligned}
$$

実は

一般に, 次のことが成立する.

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}\ (a\text{ は実数}).$$

a が有理数であれば, 次を駆使すれば証明ができるが,
ここでは紹介にとどめておく.

- $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ と, 積や商の微分法を利用.
- $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ と, 合成関数の微分法を利用.

例 2.2. $f(x) = \dfrac{x^4 - 3}{x^2}$ **の導関数.**

$f(x) = x^{-2}(x^4 - 3) = x^{-2}x^4 - 3\,x^{-2} = x^2 - 3\,x^{-2}$ **だから,**

$$f'(x) = (x^2)' - 3(x^{-2})' = 2x - 3\,(-2)x^{-3} = 2x + 6\,x^{-3} = \frac{2x^4 + 6}{x^3}.$$

例 2.3. $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$ **の導関数.**

$f(x) = 6\,x^{\frac{2}{3}}$ **だから,**

$$f'(x) = 6(x^{\frac{2}{3}})' = 6\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{2}{3}-1} = 4\,x^{-\frac{1}{3}}.$$

まとめ

基本公式

(1) $\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.

(2) $(x^a)' = a x^{a-1}$ (a は実数). 特に, 次が成り立つ.

$$\text{(2-a)} \quad (a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0)' = n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \cdots + 2\,a_2\,x + a_1.$$

$$\text{(2-b)} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \qquad \text{(2-c)} \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$