11 固有値と固有ベクトル

問題 11.1.

(1) $W_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_5(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$. (2) $W_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(3) $W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_6(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$. (4) $W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(5) $W_5(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$. (6) $W_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(7) $W_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_7(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$. (8) $W_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_{-5}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

問題 11.2.

$$(1)\ W_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(2)\ W_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(3)\ W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_{-4}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(4)\ W_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(5)\ W_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(6)\ W_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(7)\ W_{-4}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_5(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$(8)\ W_6(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad W_0(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

問題 11.3. α が A の固有値, $\boldsymbol{x}$ が固有値 α に対する固有ベクトルとすると $A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^2\boldsymbol{x}$. このようにして $A^n\boldsymbol{x} = \alpha^n\boldsymbol{x}$ がいえる. したがって A を α に, E を 1 に変えた方程式の解が固有値の候補である.

(1) 0. (2) $0, 3$. (3) $-1, 6$. (4) $0, 3, -3$. (5) $-1, 2$.

問題 11.4. 前問のように考えれば $f(\alpha)$ が $f(A)$ の固有値になることがいえる. ちなみに A の特性多項式 (固有多項式)$f_A(x)$ に対して $f_A(A) = O$ となることがいえる (Hamilton-Cayley の定理). 一方, n 次正方行列は次元が n^2 なので n^2+1 個の行列 $E, A, A^2, A^3, \cdots, A^{n^2}$ は必ず 1 次独立である. いずれにしても A の多項式 $f(A)$ で O になるものが存在する. それらの多項式のうち次数が最小で, その最高次の係数が 1 となる多項式がただ 1 つに決まるのだが, それを最小多項式という.