9　部分空間の基底と次元

問題 9.1. 次の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているか判定しなさい.

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1x_2 = 0, x_3 = 0 \right\}$.　(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = x_2 \right\}$.

(3) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{-2} \right\}$.　(4) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, \frac{x_1}{2} = \frac{x_3 - 2}{3} \right\}$.

(5) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0 \right\}$.　(6) $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 - (x_2 + x_3)^2 = 0 \right\}$.

行列と部分空間. A を $m \times n$ 行列とする. $N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である. また, $R(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$ ただし $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である. $N(A)$ を求めるには連立 1 次方程式を解く, すなわち A を行基本変形して階段行列にする. 一方 $R(A)$ は行基本変形をする際に軸にした成分がある列に元々あった列ベクトルを集めたもの, または列基本変形して残った階段行列もどきの行列の各列を集めたものが基底になる.

例 9.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. $N(A)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $R(A)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ や $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 9.2. 次の正方行列 A に対し $N(A)$ を求め, 基底を 1 組答えなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 22 \\ 3 & -13 & 33 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 15 \\ -6 & 20 & 30 \\ 3 & -10 & -15 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -13 \\ 16 & 14 & -17 \\ 17 & 13 & -19 \end{pmatrix}$

問題 9.3. 次の W は部分空間であるが, 基底を 1 組答えなさい. 更に, 次元 $\dim W$ を答えなさい.

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 0 \end{array} \right\}$.　(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$.　(4) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

(5) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2 - x_3 \end{array} \right\}$.　(6) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = x_1 + 5x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3, \\ y_3 = -7x_1 + 4x_2 - 9x_3 \end{array} \right\}$.

$\boxed{\text{応用問題}}$

問題 9.4. A, B を $m \times n$ 行列とする.

(1) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ and } B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示しなさい.

(2) $W = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, A\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}, B\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}\}$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示しなさい.

(3) $W = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_1 + B\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n\}$ が $\mathbb{R}^m$ の部分空間であることを示しなさい.

問題 9.5. 次の W は部分空間であるが, 基底を 1 組答えなさい. 更に, 次元 $\dim W$ を答えなさい.

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

(4) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

(5) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_3, \\ y_3 = -8x_1 + 15x_2 - x_3 \end{array} \right\}$.

(6) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = 5x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 - 2x_2 - x_3, \\ y_3 = -6x_1 - 18x_2 - 15x_3 \end{array} \right\}$.

(7) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \\ y_3 = -x_1 + 7x_2 \end{array} \right\}$.

(8) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3, \\ y_3 = x_1 - x_3 \end{array} \right\}$.

(9) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3, \\ y_3 = 13x_1 + 12x_2 + 8x_3 \end{array} \right\}$.

(10) $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \\ y_1 = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 3x_1 + 3x_2 + x_3, \\ y_3 = -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \end{array} \right\}$.